Contenidos

Unidad I: Cinemática

1. Posición, tiempo, velocidad y aceleración

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento, sin importar la causa que lo produce, es decir, su objetivo es describir cómo se mueve un cuerpo. En esta materia introductoria, esta descripción será independiente de la forma y tamaño de los cuerpos en movimiento. Hablaremos del movimiento de un átomo, de una pelota o de un tren, sin embargo, a los fines prácticos siempre vamos a pensar al objeto en cuestión como una partícula o cuerpo puntual.

Decimos que una partícula se mueve si la vemos cambiar de lugar, es decir que ocupa distintas posiciones en distintos instantes. Entonces, la idea de movimiento relaciona el espacio y el tiempo.

Para poder encarar el tema, es necesario definir algunos conceptos que permitan "medir" las características del movimiento de un cuerpo. Estos conceptos en física se denominan magnitudes y pueden ser vectoriales o escalares.

La posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son magnitudes vectoriales. El tiempo y el lapso son magnitudes escalares. Asimismo, definiremos otros conceptos como: distancia, trayectoria y sistemas de referencia.

Veremos que describir el movimiento de un cuerpo/objeto implicará conocer su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Para lograr esa descripción será necesario definir un sistema de referencia para la posición y otro para el tiempo.

Sistema de referencia

Toda descripción del movimiento de un objeto será relativa a un punto en el espacio físico. En la vida cotidiana uno está habituado a las referencias, por ejemplo, decimos: "dos cuadras después del semáforo", tomado al semáforo como referencia. Conocer el sistema de referencia es indispensable para describir la posición claramente. Es importante destacar que el observador tiene toda la libertad para elegir cuál es el sistema que usará para trabajar. Por ejemplo, al circular por una ruta nacional y ver un mojón que dice "542 km" sabemos que estamos a 542 km del mojón de la Plaza Congreso en Buenos Aires, medidos a lo largo de la ruta en cuestión, pues el Sistema de Vialidad Nacional (el "observador" que marcó esas posiciones) eligió ese sistema de referencia.

En síntesis, para poder describir el movimiento de un cuerpo/objeto, lo primero que necesitamos es definir un sistema de referencia, y para ello basta con fijar un origen (o un cero desde donde "medir" las distancias) y un conjunto de ejes (o direcciones).

Aunque el espacio en que vivimos está constituido por 3 ejes coordenados (que comúnmente identificamos como x-y en el piso y z por la altura), en esta materia nos limitaremos a describir movimientos en 1 eje (movimiento unidimensional, sobre una recta) o en 2 ejes (movimiento bidimensional, en el plano).

Posición

Una vez establecido el sistema de referencia estamos en condiciones de indicar el lugar donde está un objeto, es decir **su posición** $\vec{r}(t)$ en un dado instante de tiempo, *t*. La posición de un objeto es una magnitud vectorial, tiene módulo/intensidad/magnitud, dirección y sentido. En el espacio, como mencionamos antes, la posición quedará definida por 3 números, las componentes del vector: $\vec{r}(t)$ = [x (t), y(t), z(t)]. En el sistema MKS, la unidad de medida de la posición es el metro (m) y sus múltiplos y/o submúltiplos: kilómetros (1 km = 1000 m), centímetros (1 cm = 0,01 m), etc.

Para movimientos unidimensionales (sobre una recta), las distancias sobre esa recta se pueden medir a partir del origen. Para ubicar **un punto sobre una recta** (es decir una posición sobre la recta) alcanza con indicar **una coordenada**. En la figura 1.1, el auto se encuentra a tres metros a la izquierda (la "izquierda" indica el sentido sobre la recta) del mojón. Las posiciones, como dijimos, son vectores, es decir, se dibujan como "flechas", y como tales tienen una dirección (la recta), un sentido (hacia la izquierda) y un módulo (los 3m). Entonces decimos que su vector posición es $\vec{r}_{auto}$ = **–3 m**; estamos considerando el mojón como nuestro cero y usando un sistema que

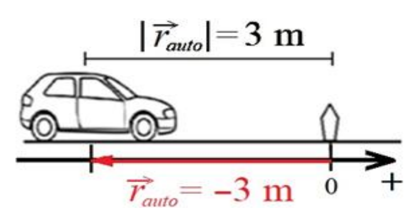


Figura 1.1 Sistema de referencia

considera positivo lo que está a la derecha y negativo lo que está a la izquierda (la “positividad” o “negatividad” de cualquier vector depende de si la correspondiente “flecha” coincide o no con el sentido del eje de coordenadas, en este caso si es hacia la derecha o hacia la izquierda del origen).

Para ubicar un punto sobre un plano, en cambio, necesitamos dar dos coordenadas (por ejemplo, en un mapa usamos latitud y longitud) y para ubicar un punto en el espacio se necesitan tres coordenadas. Para describir la posición se usa generalmente la letra *r* y según el tipo de movimiento (uni, bi o tri-dimensional) se usan simplemente una coordenada *x*, pares ordenados (*x*, *y*), o ternas (*x*, *y*, *z*). Para notar que son vectores se las escribe en negrita y se les incluye arriba la flecha de "vector": $\vec{\boldsymbol{r}}$.

Estudiar el movimiento de un cuerpo implica describir y predecir la **posición** a medida que transcurre el **tiempo**. Es decir, que tengo una posición $\vec{\boldsymbol{r}}$ para cada instante de tiempo *t* (notar que la magnitud tiempo no es una magnitud vectorial sino una magnitud escalar). O sea, **la posición es función del tiempo.** Para anotar explícitamente esta dependencia de la posición con el tiempo escribimos que: $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ (y lo leemos como “erre es función de t”).

Tiempo y lapso

El tiempo es una magnitud física y por lo tanto se puede medir. La anotamos con la letra *t*. Su unidad en el sistema MKS es el segundo (s) pero como toda unidad pueden usarse sus múltiplos (horas, días, años, etc.) o submúltiplos (milisegundos, nanosegundos, etc.) según la conveniencia.

El lapso, en cambio, es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos instantes de tiempo. Para distinguir un tiempo de otro, a la letra *t* de tiempo le agregamos subíndices, por ejemplo (t_1 o t_2 o t_3, etc., y leemos “instante de tiempo uno” o “instante de tiempo dos”, etc.). Si el tiempo t_1 = 15:39h y t_2 = 15:45h, ¿cuál es el lapso entre t_1 y t_2? El tiempo transcurrido entre t_1 y t_2 son 6 minutos y la operación matemática que hicimos para calcularlo fue la resta, la diferencia $t_2 - t_1$. En física veremos muchas veces que las diferencias de las magnitudes se anotan con la letra griega delta mayúscula, Δ. Por lo tanto, los lapsos o diferencia de tiempos los escribiremos como: $\Delta t = t_2 - t_1$.

Es importante resaltar que tanto el tiempo como el lapso son magnitudes escalares y tienen las mismas unidades pero que no son magnitudes iguales. El tiempo mide “instantes” desde un tiempo inicial (los relojes que usamos cotidianamente, por ejemplo, marcan los instantes de tiempo desde la medianoche) el lapso mide diferencias entre dos tiempos cualesquiera.

Así como necesitamos definir un sistema de referencia espacial para describir la posición de un cuerpo, también necesitaremos definir un sistema de referencia temporal, es decir definir en qué momento comenzamos a medir el tiempo, a ese tiempo se lo suele llamar t_0.

Desplazamiento

El **desplazamiento** o diferencia de posiciones, mide cuánto cambia la posición de un cuerpo entre dos instantes dados. Se calcula restando las posiciones; **es un vector** y se suele notar como $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. En la Figura 1.2 (izq.) se muestra un ejemplo.

Ya vimos que para distinguir dos medidas diferentes de una misma magnitud agregamos subíndices a la letra que indica la magnitud en cuestión. Para indicar dos posiciones diferentes, por lo tanto, anotaremos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Pero como las posiciones dependen del tiempo lo que estamos diciendo al escribir $\vec{r}_1$ es “la posición en el instante t_1” y por lo tanto $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$. Cualquiera de estas dos formas de anotar es válida y en el curso usaremos una o la otra según la comodidad.

De la misma manera que el tiempo y el lapso no son lo mismo, la posición y el desplazamiento tampoco son lo mismo; ambos son vectores, tienen las mismas unidades, pero representan conceptos diferentes. El vector posición de un cuerpo es un punto en el espacio que se mide respecto del origen del sistema de coordenadas y que se indica como $\vec{r}(t)$ en un instante genérico *t*. El desplazamiento es una magnitud vectorial que mide la separación entre dos puntos del espacio en dos instantes diferentes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1).$$

Trayectoria

La trayectoria es la curva descripta por el móvil en su recorrido. Es decir, es el **conjunto de todas las posiciones** que el cuerpo fue ocupando en el espacio a medida que transcurre el tiempo, las posiciones por las que pasó durante su movimiento. La figura 1.2 muestra las trayectorias de dos movimientos diferentes: la

de una flecha arrojada hacia un árbol y la del planeta Plutón alrededor del sol. Cada punto indica una posición $\vec{r}$ en un instante preciso t.

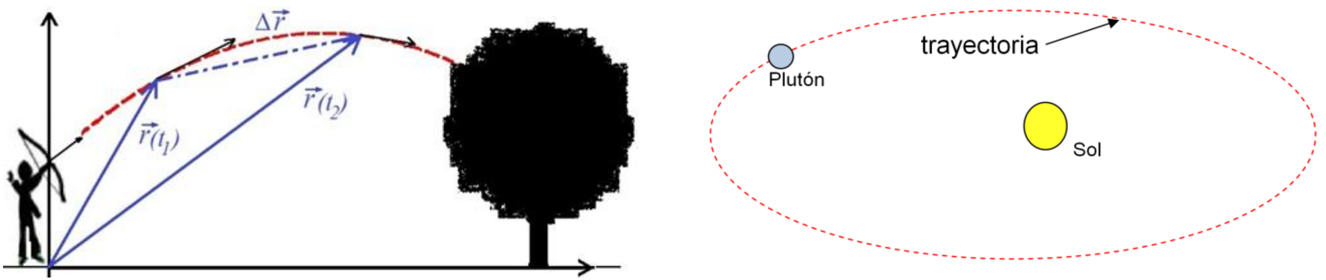


Figura 1.2: Trayectorias: de una flecha impactando en un árbol (izquierda); de Plutón alrededor del Sol (derecha).

Distancia recorrida

Como señalamos antes, el desplazamiento es un vector. La distancia recorrida, en cambio, es un escalar positivo y corresponde a la longitud de la trayectoria. En la figura 1.2, la distancia recorrida es la longitud de las líneas punteadas (rojo). En algunos casos la distancia recorrida coincide con el módulo del vector desplazamiento. Para pensar: tomen el caso del planeta Plutón de la figura y consideren una vuelta completa. ¿Cuál es el módulo del vector desplazamiento? ¿Es igual a la distancia recorrida?

Velocidad

La **velocidad** es la magnitud que mide cuánto cambia la posición de un cuerpo a medida que transcurre el tiempo. Matemáticamente, es el cociente entre un desplazamiento $\boldsymbol{\Delta\vec{r}}$ y un lapso Δt. Dado que el desplazamiento es un vector y que el lapso es un escalar, el cociente de ambos vuelve a ser un vector y por lo tanto la **velocidad** también es un **vector** (es decir al hacer un dibujo esquemático la velocidad es una "flecha" con dirección y sentido). Para poder calcular la velocidad de un cuerpo, debemos saber cuánto se desplazó y qué tiempo le llevó hacerlo. Si tomamos dos puntos cualesquiera en una trayectoria, definimos la **velocidad media** como:

$$\vec{v}_{M\,1-2} = \frac{\Delta\vec{r}_{1-2}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad (1.1)$$

Se llama velocidad media porque esta medida de la velocidad no tiene información acerca de lo que pasó entre t_1 y t_2. Es decir, no tiene información sobre la trayectoria real del cuerpo entre esos dos instantes. La velocidad media indica que, independientemente de la trayectoria real, si se quiere lograr el mismo desplazamiento en el mismo lapso, moviéndose en forma rectilínea y con velocidad constante, hay que hacerlo con una velocidad igual a $\vec{v}_M$.

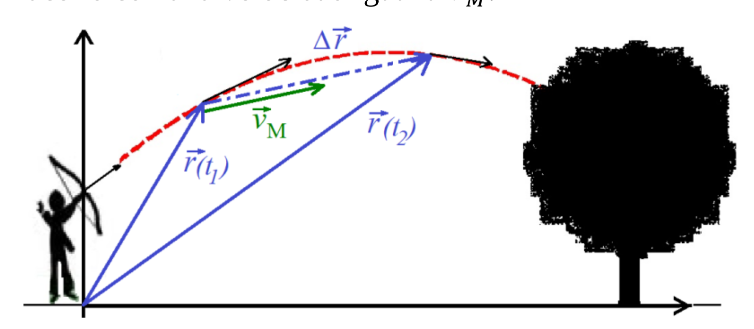


Figura 1.3: Velocidad media (flecha verde) entre t_1 y t_2.

Si tomamos el desplazamiento entre t_1 y t_2, la velocidad media en la figura 1.3 es la flecha verde indicada. La trayectoria de la flecha está representada por la línea punteada roja, pero si otra flecha imaginaria fuera en línea recta (sobre la flecha verde) moviéndose con velocidad constante $\vec{v}_M$, llegaría al mismo lugar que la flecha real en el mismo lapso. Si queremos tener en cuenta la trayectoria recorrida (línea punteada roja), tenemos que definir la **velocidad escalar promedio** que es la distancia recorrida en la trayectoria dividida el intervalo de tiempo. Si queremos, en cambio, una descripción más precisa tendremos que examinar la velocidad en cada instante de tiempo. Para eso, debemos hacer los lapsos infinitesimalmente pequeños, es decir que t_2 debe estar muy muy próximo a t_1 de tal modo que los dos puntos en la trayectoria estén prácticamente superpuestos. A esta velocidad, con Δt infinitesimalmente pequeño, se la llama **velocidad instantánea**. Matemáticamente, se calcula como un límite (en particular, este tipo de límites se llaman *derivadas*: la velocidad es la derivada de la posición):

$$\vec{v}_{(t)} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_{1-2}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.2)$$

Es importante remarcar que la dirección de la velocidad instantánea siempre es tangente[1] a la trayectoria y su sentido es el mismo que el del movimiento del objeto. Cuando la velocidad instantánea es constante (en módulo, dirección y sentido) en toda una trayectoria, la velocidad instantánea coincide con la velocidad media en cualquier lapso.

La unidad para medir la velocidad en MKS es m/s aunque en el uso diario es frecuente expresarla en km/h. Ojo que las unidades se leen como *metros por segundo* o *kilómetros por hora*, pero son un cociente. ¿Recuerdan de donde sale la equivalencia: 1 m/s = 3,6 km/h ó 1 km/h ~ 0,28 m/s?

Aceleración

El vector velocidad no siempre se mantiene constante (es decir, cambia su módulo y/o su dirección y/o su sentido). La **aceleración** es la magnitud física que da cuenta del cambio de la velocidad a medida que transcurre el tiempo. Al igual que el desplazamiento y la velocidad, la **aceleración** es un **vector** (con módulo, dirección y sentido).

Análogamente a lo que hicimos para definir la velocidad como la variación de posiciones sobre un lapso, la aceleración es la variación ("la delta": "Δ") de la velocidad $\Delta\vec{v}$ sobre un lapso Δt. Podemos, por tanto, definir la **aceleración media** y la **aceleración instantánea.** La aceleración media supone que durante todo el movimiento el vector aceleración es constante y se calcula como:

$$\vec{a}_{M\,1-2} = \frac{\Delta\vec{v}_{1-2}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad (1.3)$$

La **aceleración instantánea** se calcula como la *derivada de la velocidad*:

$$\vec{a}(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_{1-2}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.4)$$

y coincide con la aceleración media en cualquier lapso, si la aceleración es constante. La unidad para medir la aceleración en MKS es m/s^2.

Debemos remarcar que la **posición**, la **velocidad**, la **aceleración** y el **desplazamiento** son **vectores**. Como tales, tienen módulo, dirección y sentido. En la primera parte de esta unidad, trabajaremos sobre movimientos rectilíneos, es decir en una dimensión. En ese caso, los vectores son de una única coordenada: el módulo es el valor absoluto, la dirección es la única posible y el sentido está dado por el signo. Sin embargo, es importante recordar siempre que se trata de magnitudes vectoriales.

Gráficos y ecuaciones

Como dijimos anteriormente, el objetivo de la cinemática es describir el movimiento: nos interesa conocer los valores de posición, velocidad y aceleración a medida que transcurre el tiempo. Matemáticamente, esto se describe como "funciones del tiempo". Queremos expresar: la ***posición en función del tiempo***, la ***velocidad en función del tiempo*** y la ***aceleración en función del tiempo***. Una función puede expresarse mediante una ecuación o un gráfico. Empecemos por el gráfico. Para el caso de posición en función del tiempo, en la figura 1.4 vemos una representación que nos permite saber la posición de un cuerpo en un momento determinado. Por supuesto, esta posición está medida desde un sistema de referencia que habremos fijado. Del gráfico podemos saber, por ejemplo, que cuando empezamos a medir, el móvil se encontraba a 3 m a la izquierda del origen, que transcurridos 4 segundos el móvil se encontraba a 5 m a la izquierda del origen o que durante los primeros 0,5 s permaneció en el mismo lugar. Sabemos que nunca pasó por la posición −10 m (nunca se alejó más de 10 m a la izquierda) y, en cambio, pasó por la posición −4 m en cuatro ocasiones. ¿Qué otra información se puede leer de este gráfico?

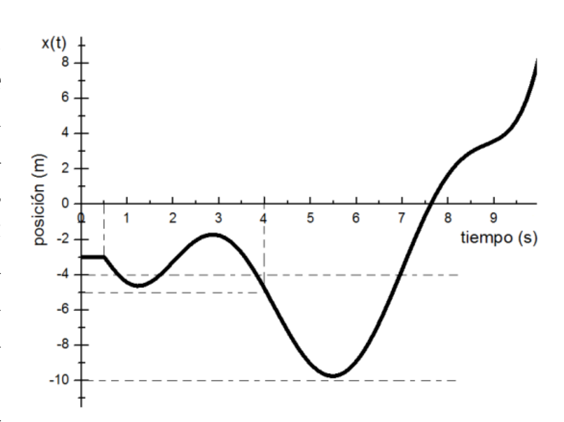


Figura 1.4: Gráfico de posición en función del tiempo.

1 Recta tangente a una curva en un punto, es la recta que al pasar por dicho punto tiene la misma pendiente que la curva.

La otra forma de transmitir la información de la posición del móvil en cada instante de tiempo, es dar la fórmula de la función. Por ejemplo,

$$x(t) = 72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,t \qquad \text{(I)}$$

Para saber dónde estaba el móvil transcurridos cuatro segundos, reemplazamos t = 4 s en la ecuación (I) y obtenemos que estaba a 288 metros del punto de referencia, porque $x(4\ \mathrm{s}) = 72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ 4\ \mathrm{s} = 288\ \mathrm{m}$

Al revés, si queremos saber cuándo pasó por la posición 180 m, tenemos que buscar el valor de t en la ecuación (I):

$x(t) = 180\ \mathrm{m} = 72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,t$ entonces $t = \frac{180\ \mathrm{m}}{72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2{,}5$ s.

Por supuesto, teniendo la ecuación es más o menos fácil encontrar el gráfico de la función. En algunos casos particulares (por ejemplo, cuando el gráfico es una recta o una parábola), es igual de fácil obtener la fórmula a partir de algunos puntos del gráfico.

En el gráfico de velocidad en función del tiempo (figura 1.5) debemos recordar que los números positivos corresponden al sentido que nosotros elegimos como tal en nuestro sistema de referencia y los negativos corresponden al sentido opuesto. En nuestro ejemplo del auto, las velocidades positivas corresponden a moverse "hacia la derecha" y las velocidades negativas, "hacia la izquierda".

El gráfico de velocidad en función del tiempo, además de darnos la información de cuál es la velocidad en cada instante, nos permite conocer el desplazamiento del móvil en un intervalo de tiempo, como el área bajo la curva (volveremos sobre esta idea más adelante).

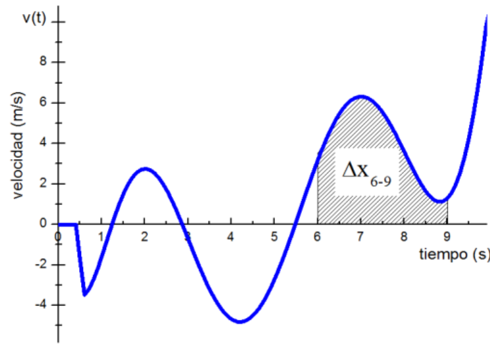
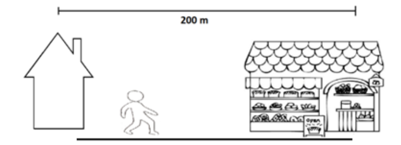


Figura 1.5: Velocidad en función del tiempo.

Ejemplo

Juan sale de su casa y va hasta el almacén que está a dos cuadras (200 m) caminando a 2 m/s. Se queda en el almacén cinco minutos y vuelve a su casa corriendo a 6 m/s. Calcule: a) el desplazamiento y la velocidad media de Juan; b) el tiempo que tardó en ir al almacén y el tiempo que tardó en volver. c) Si salió a las 15:00 h ¿A qué hora regresó?



Rta: a) Desplazamiento: $\Delta\vec{x} = 0$ m; velocidad media: $\vec{v}_m = 0$; b) Para ir tardó $\Delta t_1 = 100\ \mathrm{s} = 1\mathrm{min}\ 40\ \mathrm{s}$. Para volver, tardó $\Delta t_2 = 33{,}3$ s; c) Regresó a las 15:07:13 (h:min:s).

****Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 1 a 6 de la guía 1****

2. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Movimiento rectilíneo

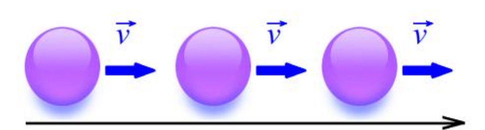


Figura 2.1 Al eje de coordenadas lo hacemos coincidir con la dirección de movimiento.

Un movimiento es rectilíneo cuando la trayectoria es una línea recta. Como el sistema de referencia es arbitrario, siempre podemos elegir que un eje de las coordenadas (usaremos el eje *x*) coincida en dirección con la recta de la trayectoria. Recuerden que el sistema de coordenadas (o de referencia) se elige al comienzo del problema y queda fijo hasta el final (es decir, es arbitrario, pero es único). De esta manera, **la posición** queda determinada por la **coordenada** x, la **velocidad** por la componente *x* de la velocidad, v_x, y la **aceleración** por la componente *x* de la aceleración a_x. A partir de ahora, y por simplicidad, no escribiremos más los subíndices *x* de cada componente de las magnitudes vectoriales velocidad y aceleración (es decir, nunca hablaremos de sus componentes *y* - *z*).

Movimiento uniforme

Un movimiento es uniforme si la posición cambia lo mismo (igual $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$) en intervalos de tiempo iguales (mismo $\Delta t = t_2 - t_1$). Dicho de otra forma, es uniforme si la **velocidad es constante**. Sólo en el movimiento uniforme la velocidad media, v_m , coincide con la velocidad instantánea, *v(t)*. Es decir, $v(t) = v_m$.

Dado que la aceleración es la variable que mide los cambios en la velocidad en función del tiempo, entonces para un movimiento uniforme la aceleración es nula en todo instante, o sea, $a(t) = 0$.

Ecuación horaria (ecuación que describe la posición *x* en función del tiempo *t*):

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \qquad (2.1)$$

En la ecuación horaria, las condiciones iniciales del movimiento están dadas por x_0 y v_0, que son la posición y la velocidad en el instante t_0 (que puede ser cualquier valor: es cuando arranca el cronómetro que mide el tiempo). Por ejemplo, si la posición en el instante inicial $t_0 = 0\text{ s}$ es $x_0 = x(t_0) = 0\text{ m}$ y la velocidad inicial es $v_0 = v(0\text{ s}) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ¿Cómo será la ecuación horaria?

Sólo necesitamos reemplazar los valores numéricos en (2.1):

$$x(t) = 0\text{ m} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}(t - 0\text{ s}) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t$$

¿Cómo será el gráfico de *x* vs. *t* y el de *v* vs. *t*?

La ecuación (2.1) es una función lineal, por lo tanto, **el gráfico *x* vs. *t* es una recta cuya pendiente es la velocidad del cuerpo,** v_0. (Para pensar: ¿Cuál será su ordenada al origen?). Por otro lado, como ya lo mencionamos, la velocidad es constante, o sea que $v(t) = v_0$ para todo instante *t*. Por lo tanto, usando los valores del ejemplo anterior, los gráficos de la ecuación horaria y de la velocidad como función del tiempo quedan como en la figura 2.2.

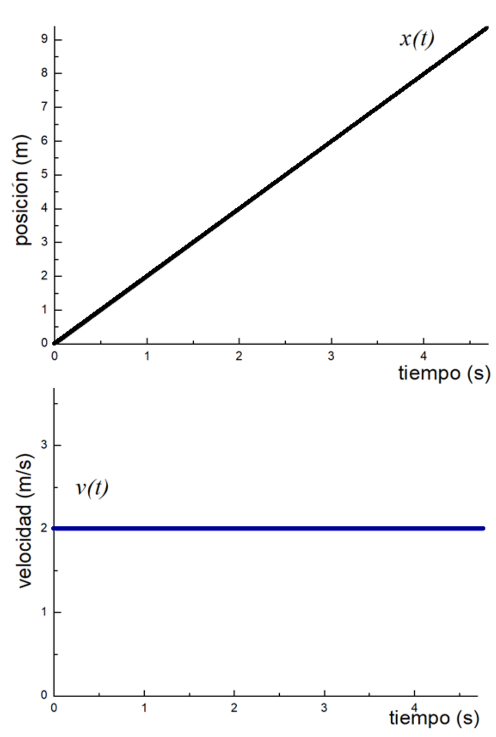


Figura 2.2: para un MRU: posición en función del tiempo (arriba); velocidad en función del tiempo (abajo).

El gráfico de **velocidad** en función del tiempo en un movimiento uniforme es una **recta horizontal.**

Volvamos ahora a la ecuación (2.1). Si despejamos el término de la velocidad (es decir pasamos el término de la posición inicial del "otro" lado del "="), obtenemos $x(t) - x_0 = v_0(t - t_0)$ que es lo mismo que $\Delta x = v_0 \Delta t$. Recordando que Δx es el vector desplazamiento, y notando que en un gráfico de velocidad en función del tiempo el producto $v\Delta t$ ("base por altura") es el área debajo de la recta que indica la velocidad, obtenemos el siguiente resultado que es totalmente general (es decir, vale para casos más

complicados que el MRU): en un gráfico de **velocidad en función del tiempo**, el área bajo la curva es el **desplazamiento.** Es importante notar que Δx calculado tiene unidades de longitud (m) y no de superficie (m²). Este resultado se muestra gráficamente en la figura 2.3:

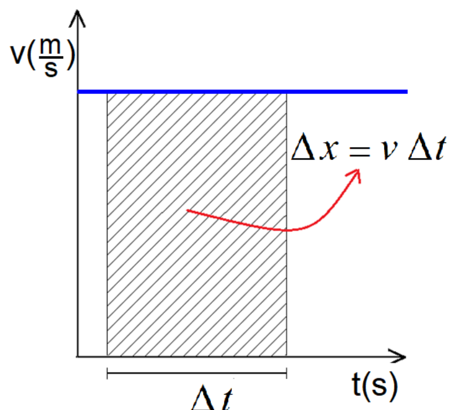


Figura 2.3: el desplazamiento es el área bajo la curva de *v* vs. *t*.

¿Cómo sería la velocidad si el movimiento se realiza en sentido opuesto?

Si el sentido del movimiento es opuesto, $x < x_0$, y por lo tanto $\Delta x < 0$ (recuerden que el desplazamiento es un vector, por lo tanto puede ser negativo). Como Δt es siempre positivo, la velocidad que es el cociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, será también negativa ($v_0 < 0$).

Y ahora que nombramos una velocidad negativa, ¿cómo creen que se diferencian el gráfico de una ecuación horaria con $v_0 < 0$ (negativa) y una con $v_0 > 0$ (positiva)? En la Fig. 2.4 se muestran dos ejemplos genéricos, piensen ustedes cuál corresponde a cuál.

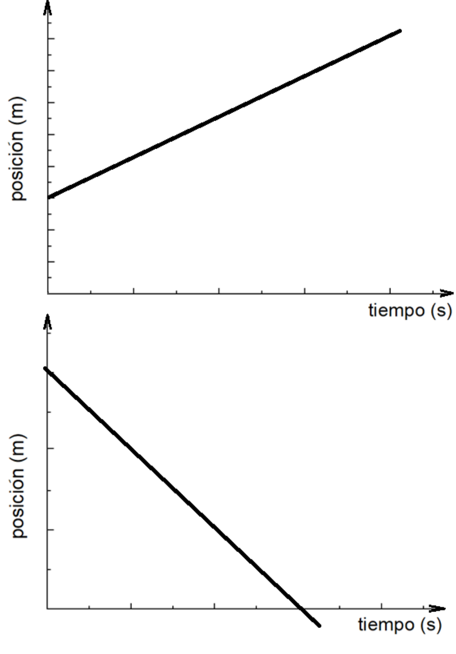


Figura 2.4: MRU con velocidades de distinto signo

Para finalizar, discutamos cómo es el gráfico de la tercera magnitud vectorial que necesitamos para describir el movimiento de los cuerpos: el vector la aceleración. Ya dijimos que, en el MRU, la aceleración es nula (es decir, vale cero) para cualquier instante de tiempo t. Por lo tanto, $a(t) = 0$. Como cero es un valor constante (tan válido como cualquier otro), el gráfico de **la aceleración** en función del tiempo en un movimiento rectilíneo y uniforme es una **recta horizontal sobre el eje de las abscisas** (eje horizontal, en este caso, el eje temporal). ¿Pueden graficarla?

Encuentro

Todo lo dicho hasta ahora (gráficos y ecuaciones) es válido para todo objeto que se mueve, es decir, para todo móvil que se rige por un MRU. Si nuestro **problema tiene más de un móvil** (pueden ser dos, tres, etc., todos los que se quiera), **cada móvil tendrá su ecuación de movimiento con sus condiciones iniciales.** Las posiciones y las velocidades de los dos móviles se describen en el mismo sistema de referencia.

La condición para que se produzca un encuentro entre los móviles es que los mismos tengan la misma posición en el mismo momento.

¿Cómo traducimos esta afirmación a ecuaciones?

Simple: si la posición del móvil ***A*** está descrita por la ecuación horaria $x_A(t)$ y la del móvil ***B*** por $x_B(t)$, la condición para que se encuentren será que:

$$x_A(t_E) = x_B(t_E)$$

Es decir, en el mismo instante t_E (que llamaremos instante del encuentro), las posiciones x_A y x_B deben ser iguales. En un gráfico de posición en función del tiempo para los dos cuerpos, el encuentro estará representado en la intersección de ambos (Fig. 2.5).

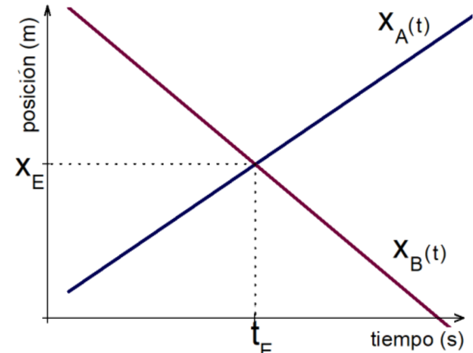


Figura 2.5: posición y tiempo de encuentro indicado para dos móviles en un gráfico *x* vs. *t*.

Ejemplo:

Un auto sale de Buenos Aires con destino a Azul marchando a 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y, simultáneamente, parte desde Azul hacia Buenos Aires otro auto a 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Si la distancia entre ambas ciudades es de 300 km, determine:

a) al cabo de cuánto tiempo desde la partida se producirá el encuentro,

b) a qué distancia de Buenos Aires se cruzan.

c) Repetir los cálculos de a y b si el coche parte de Buenos Aires 45 minutos después que el segundo.

Vayamos paso a paso

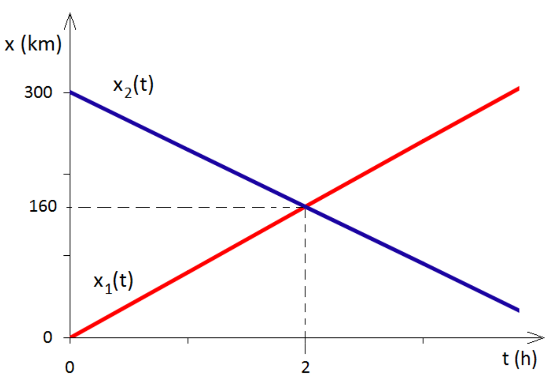
1-Elegimos un sistema de referencia: el origen (0) en Buenos Aires. Como parten simultáneamente, comenzamos a contar el tiempo en la partida ($t_0 = 0$ para los dos).

2-Escribimos las ecuaciones horarias para cada automóvil:

$x_1(t) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$ y $x_2(t) = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$

Como las velocidades tienen sentidos opuestos, los signos de ambas son distintos.

a) La condición de encuentro será: $x_1(t) = x_2(t)$ y despejamos *t*.



$$80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$$

$$80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t + 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t = 300\text{ km}$$

$$150\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t = 300\text{ km}$$

$$t = 2\text{ h}$$

b) Reemplazamos $t = 2$ h en una de las ecuaciones (cualquiera debe dar igual):

$x_1(2\text{h}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, 2\text{h} = 160\text{ km}$ ó $x_2(2\text{h}) = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, 2\text{h} = 300\text{ km} - 140\text{ km} = 160\text{ km}$

c) Ahora, el auto que sale de Buenos Aires lo hace 45 minutos después del otro. Entonces, para el que llamamos auto 1: $t_{01} = 45\text{ min} = \frac{3}{4}\text{ h} = 0{,}75\text{ h}$. Las nuevas ecuaciones quedan así:

$x_1'(t) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\,(t - \frac{3}{4}\text{ h})$ y $x_2'(t) = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$

$$80\frac{\text{km}}{\text{h}}\,(t - \frac{3}{4}\text{ h}) = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$$

$$80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t - 60\text{ km} = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t$$

$$80\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t + 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t = 300\text{ km} + 60\text{ km}$$

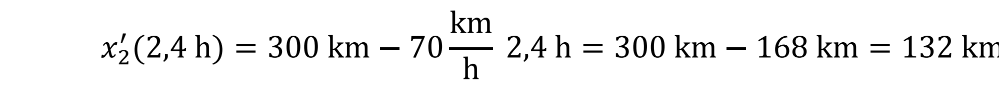
$$150\frac{\text{km}}{\text{h}}\, t = 360\text{ km}$$

$$t = \frac{36}{15}\text{ h} = 2{,}4\text{ h} = 2\text{ h }24\text{ min}$$

Reemplazamos $t = 2{,}4$ h en cualquiera de las ecuaciones:

$x_1'(2{,}4\text{ h}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\,(2{,}4\text{ h} - 0{,}75\text{ h}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\,1{,}65\text{ h} = 132\text{ km}$,

ó



$$x_2'(2{,}4\text{ h}) = 300\text{ km} - 70\frac{\text{km}}{\text{h}}\, 2{,}4\text{ h} = 300\text{ km} - 168\text{ km} = 132\text{ km}$$

**** Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 7 a 14 de la guía 1****

3. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Un movimiento rectilíneo es uniformemente variado cuando la velocidad cambia lo mismo (igual Δv) en intervalos de tiempo iguales (igual Δt). Dicho de otra forma, la aceleración es constante y **la velocidad crecerá (o decrecerá) linealmente con el tiempo**. En el MRUV la aceleración media, a_M, coincide con la aceleración instantánea, *a(t)*, y la ecuación de la velocidad en función del tiempo es

$$a(t) = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \quad a\Delta t = \Delta v = v(t) - v_0$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \qquad (3.1)$$

El gráfico *v* vs. *t* es una recta, como se muestra en la figura 3.1 (recordar que en MRU este gráfico era una recta horizontal), cuya pendiente es la aceleración.

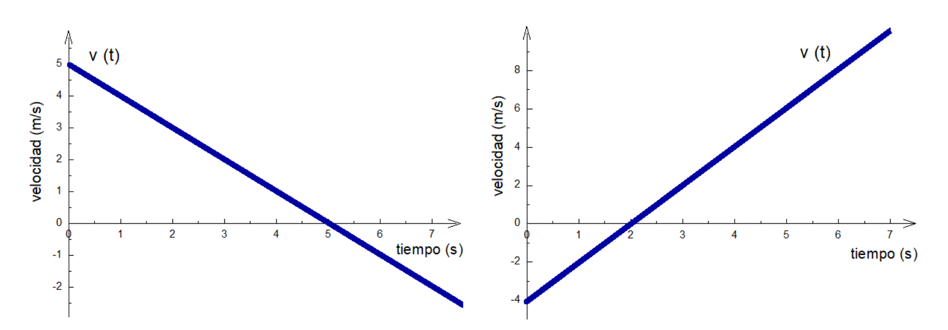


Figura 3.1: Gráficos de velocidad en función del tiempo en MRUV.

Recordemos que, como ya vimos para MRU, en un gráfico de **velocidad en función del tiempo**, el área bajo la curva es el **desplazamiento** (Δx). Entonces, podemos calcular el Δx, en un cierto Δt, a partir de la figura 3.2 como la suma del área de un rectángulo y un triángulo. De la misma manera que hicimos en MRU, podemos encontrar así la ecuación horaria (posición en función del tiempo):

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad (3.2)$$

Notar que los dos primeros términos de la ecuación (3.2), $x_0 + v_0(t - t_0)$, son idénticos a lo que habíamos visto para MRU.

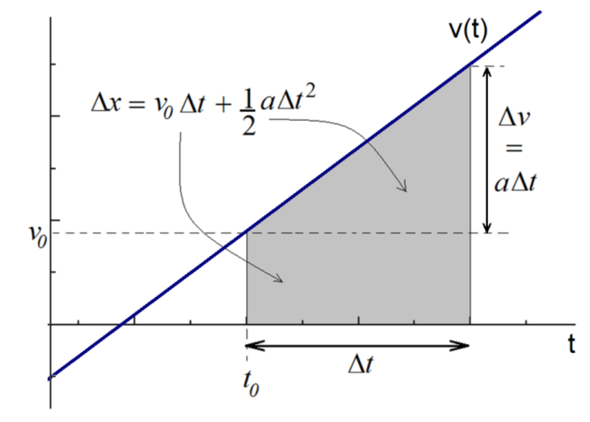


Figura 3.2: Gráfico de velocidad en función del tiempo en un MRUV

La posición, dependiente del tiempo, es una **función cuadrática** (polinomio de grado 2) y, por lo tanto, su gráfico es una **parábola**. La curvatura de la parábola queda determinada por el signo de la aceleración como se muestra en los ejemplos de la figura 3.3.

¿Cuál es con $a > 0$ y cuál con $a < 0$?

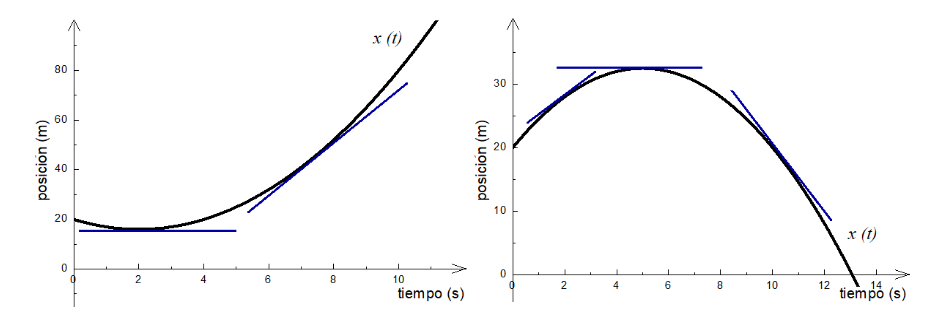


Figura 3.3: Posición en función del tiempo para aceleraciones de distinto signo.

Es importante recordar que en el gráfico de *x* vs. *t* la velocidad en cada instante es la pendiente de la recta tangente a la función (como ejemplo, se dibujaron algunas en color azul en la Fig. 3.3). Ésta va variando punto a punto; no es constante como sucedía en el caso de MRU.

Usualmente, usamos la palabra "*acelerado*" para referirnos a móviles que van cada vez más *rápido* y la palabra "*retardado*", "*desacelerado*" o "*frenado*" para móviles que van cada vez más *despacio*. Rápido y despacio son palabras que a veces evitamos en clases de física (aunque todos las usamos habitualmente relacionadas con la velocidad), porque se refieren al módulo de la velocidad (recordemos que, en un caso general, se trata de un vector de tres coordenadas). En los casos de movimiento rectilíneo, son palabras que no tienen en cuenta el signo de la velocidad. Esto suele prestarse a confusiones y para aclararlas les proponemos el ejemplo que se grafica en la figura 3.4.

Para t entre 0 y 1 s, la velocidad en módulo disminuye (va más despacio), mientras que para t entre 1 y 4 s aumenta (va más rápido). Entre $t = 0$ y $t = 1$ s el movimiento es retardado (aunque la aceleración sea positiva), mientras que a partir de $t = 1$ s el movimiento es acelerado.

En síntesis, no alcanza con saber el signo de la aceleración para saber si el movimiento es retardado o acelerado. Hay que ver también el signo de la velocidad.

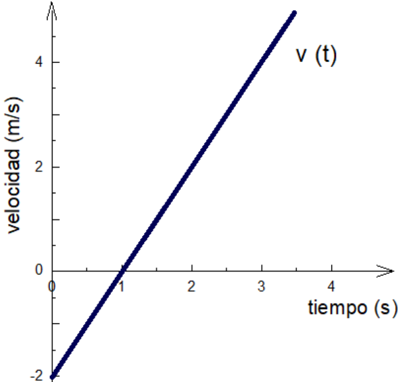


Figura 3.4: Ejemplo de v vs. t para MRUV. Entre 0 y 1 s el móvil va más despacio.

Veamos ahora como se grafica la aceleración:

En un MRUV la aceleración es constante y su gráfico es una recta horizontal

$$a(t) = a \qquad (3.3)$$

Los gráficos de la figura 3.5 muestran la aceleración en función del tiempo para los ejemplos de la figura 3.1 ¿cuál es el de cada uno?

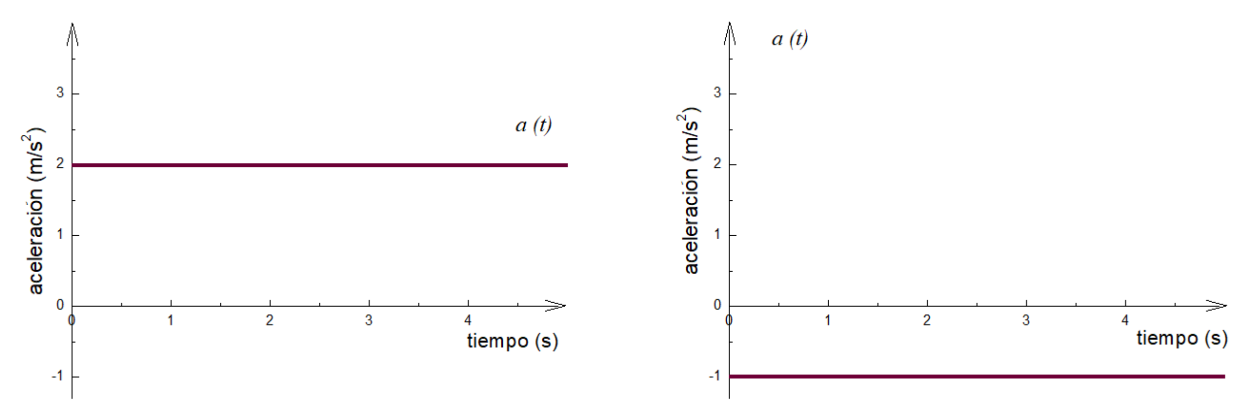


Figura 3.5: ejemplos de a vs. t para MRUV.

Ejemplo

Un ciclista que pedalea a 5 m/s (18 km/h), acelera a razón de 0,2 m/s^2. ¿Cuánto tarda en recorrer 200 m? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?

Recordemos que las ecuaciones que describen un MRUV son:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad (3.2)$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \qquad (3.1)$$

$$a(t) = a \qquad (3.3)$$

Repasemos los datos que nos dice el problema:

$t_0 = 0$ s (podemos elegirlo arbitrariamente y “cero” es la elección más sencilla)

$v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad a = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\quad \Delta x = 200$ m (el problema nos dice cuánto se desplazó el ciclista: es x-x_0)

Reemplazando en la ecuación de posición:

$$200\text{ m} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}t + \frac{1}{2}0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2$$

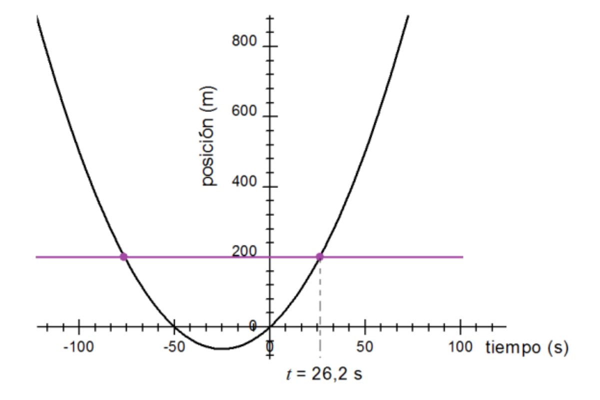
Lo siguiente será despejar *t*, recordando la resolvente de la cuadrática:

Dada $ax^2 + bx + c = 0$ las raíces son: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

No hay que olvidarse de que para aplicar la resolvente, primero tenemos que reescribir la ecuación, igualándola a cero:

$\frac{1}{2}0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 + 5\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 200\text{ m} = 0.$

$t = \frac{-5\frac{\text{m}}{\text{s}} \pm \sqrt{(5\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - 4\ 0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}(-200\text{ m})}}{2\ 0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ $\quad t_1 = -76{,}2\text{ s} \quad t_2 = 26{,}2\text{ s}$



La solución negativa no tiene sentido para nosotros ya que nuestro problema comenzó en $t_0 = 0$ s. La única solución es $t = 26{,}2$ s

Si elegimos $x_0 = 0$ m, el gráfico de posición en función del tiempo sería el de la derecha. (Dibujamos toda la función para que se vea gráficamente la solución de t_1 que descartamos, pero nuestro problema comienza en 0 s).

La siguiente pregunta es ¿cuál será su velocidad en ese momento?

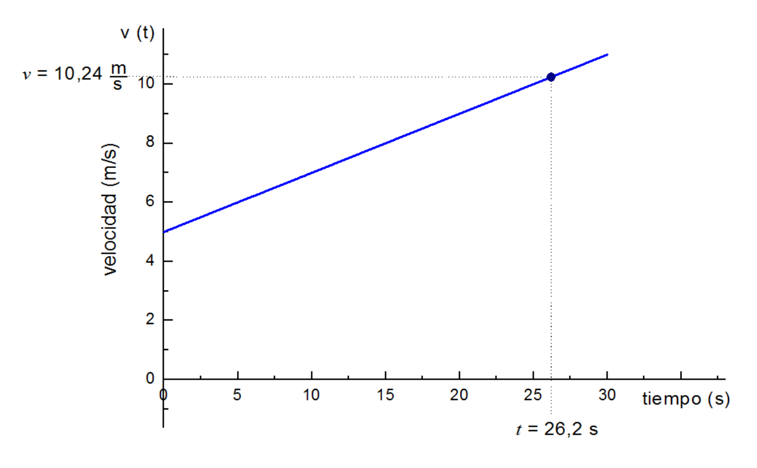
Ahora sabemos que "ese momento" es: $t = 26{,}2$ s

La ecuación de la velocidad nos permite hallar el valor de *v* para cualquier *t* :

$$v(26{,}2\text{ s}) = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}26{,}2\text{ s}$$
$$v(26{,}2\text{ s}) = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} + 5{,}24\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v(26{,}2\text{ s}) = 10{,}24\frac{\text{m}}{\text{s}} = 36{,}86\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(A veces, escribir la velocidad en $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nos hace más fácil "imaginar" la situación).

A la derecha se muestra el gráfico de velocidad en función del tiempo para este ejemplo.



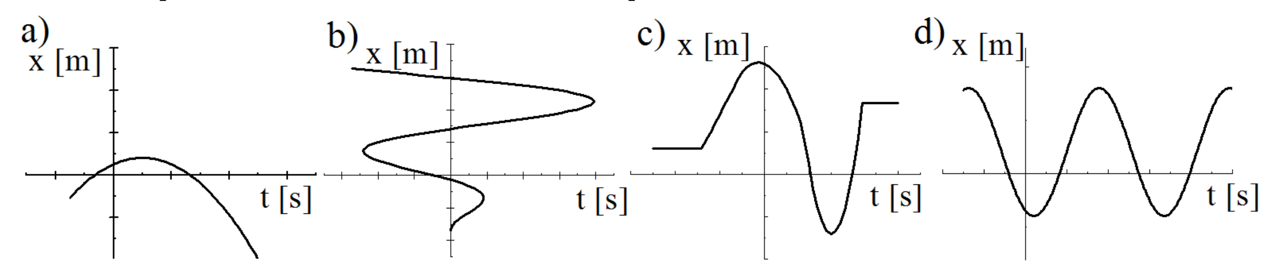
****Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 15 a 28 de la guía 1****

Guía de Problemas N° 1: Cinemática en una dimensión.

Problemas cualitativos de introducción

Problema 1: Para los fenómenos observables que se proponen a continuación, adoptar un sistema de referencia y elaborar un gráfico cualitativo de la posición en función del tiempo.
a) Posición de un automóvil estacionado.
b) Posición de un ascensor que parte desde el noveno piso hacia planta baja.
c) Posición de una moneda arrojada hacia arriba.
d) Altura que alcanza el agua en un balde inicialmente vacío, puesto bajo canilla abierta.
e) Posición de la mano de un carpintero mientras pinta un listón.

Problema 2: Estudie detenidamente los siguientes gráficos de posición en función del tiempo y discuta cuáles son físicamente posibles. Describa cualitativamente el tipo de movimiento involucrado.



Problema 3: Se ha confeccionado la siguiente tabla con las posiciones de un objeto en función del tiempo:

x (cm)	4	5	7	7	6	3	1	-1	-3
t (s)	0	1	2	3	4,5	6	8	10	11

Haga un gráfico del movimiento y estime en forma aproximada la posición del móvil para $t = 4$ s y $t = 7$ s.

Problema 4: La posición de una bicicleta como función del tiempo está dada por la fórmula matemática $x(t) = -14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t + 74\ \text{m}$. Confeccione una tabla de valores de *x* vs. *t* para valores de *t*, desde $t = 0$ s a $t = 6$ s para cada segundo. Elija una escala en ambos ejes y haga un gráfico del movimiento. ¿Cuál es el desplazamiento de la bicicleta entre $t_1 = 1$ s y $t_2 = 2$ s y entre $t_1 = 3$ s y $t_2 = 5$ s?

Problema 5: La evolución temporal de la coordenada *x* de un objeto viene dada por la expresión

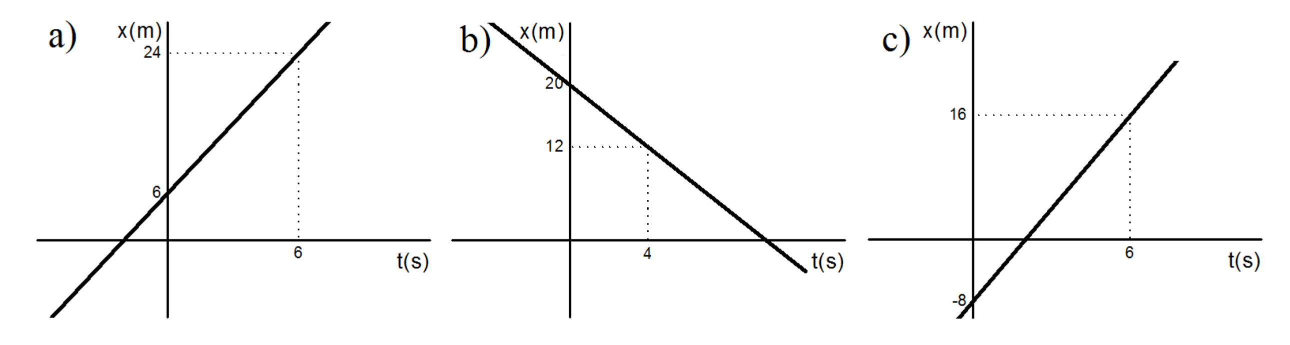
$$x(t) = -4\ \text{m} + 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t^2$$

a) Haga un gráfico de *x* como función de *t*, desde $t = 0$ s hasta $t = 8$ s dibujando puntos cada segundo. Trace una curva que una los puntos. ¿Qué tipo de movimiento describe esta ecuación?
b) ¿Dónde se encuentra el objeto cuando $t = 2$ s? ¿Es posible encontrarlo en $x = 3$ m?

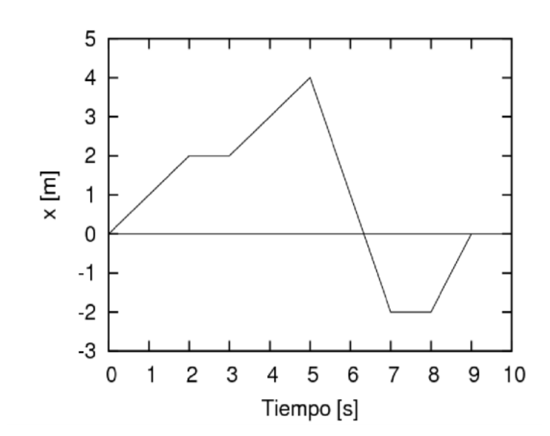
Problema 6: La velocidad del sonido en el aire a temperatura ambiente es de aproximadamente 340 m/s. Suponga que se ve un rayo al aproximarse una tormenta y 6 segundos después se escucha el trueno. Estime a qué distancia se encuentra la tormenta.

Movimiento rectilíneo uniforme

Problema 7: Los siguientes gráficos corresponden a distintos móviles que realizan movimientos rectilíneos. Hallar las ecuaciones horarias de cada uno de ellos y en qué instante pasa por el eje de la abscisa.



Problema 8: Al mostrar un paso de baile una persona se mueve en una dimensión, que llamaremos *x*. El gráfico representa cómo varía esa coordenada en función del tiempo, *x(t)*.
a) Calcule la velocidad media en los intervalos: [0 ; 2 s], [2 ; 3 s], [3 ; 5 s], [5 ; 7 s], [7 ; 8 s], [8 ; 9 s]
b) ¿Puede calcular la velocidad instantánea en los siguientes tiempos? *t* = 1 s, *t* = 2,5 s, *t* = 5 s y *t* = 6 s.



Problema 9: Juan, cronómetro en mano y ubicado en un tramo rectilíneo de una ruta, estudia el movimiento de los coches que circulan por la misma con velocidad constante. A su derecha, y a 40 metros de él hay un árbol, y más lejos un cartel. En cierto instante ve que un automóvil se le acerca por la izquierda, y dispara el cronómetro cuando lo tiene a 100 metros; el auto pasa frente a él 5 segundos después. Utilizando como origen la posición de Juan, y los tiempos que indica el cronómetro:
a) Hallar la velocidad del auto, y expresarla km/h. Escribir su ecuación horaria.
b) Hallar en qué instante pasará el auto frente al árbol.
c) Si cuando el cronómetro indica 30 segundos el auto pasa frente al cartel, ¿cuántos metros hay entre este último y el árbol?
d) Hacer los gráficos *x(t)* y v(*t*), indicando el paso del auto frente al árbol y al cartel.

Problema 10: Un ciclista recorre el primer tramo de un camino recto con una velocidad 25 km/h durante 3 horas y el segundo tramo con una velocidad de 40 km/h durante 2 horas. (Desprecie el tiempo empleado en cambiar de velocidad)
a) Calcule la distancia total recorrida.
b) Halle la velocidad media correspondiente a la totalidad del recorrido.
c) Encuentre las expresiones de la posición y de la velocidad del ciclista en función del tiempo en cada tramo y represéntelas en un único gráfico.

Problema 11: La casa de Alberto se encuentra a 900 m en línea recta de la casa de Diana. Caminando con velocidad constante, Alberto tarda 10 minutos en cubrir esa distancia, mientras que Diana la recorre en 15 minutos. Cierto día salen ambos a las 15 h, cada uno desde su casa y dirigiéndose a la casa del otro.
a) Determinar a qué hora y a qué distancia de la casa de Diana se encuentran.
b) Trazar un gráfico posición-tiempo para ambos caminantes e interpretar gráficamente el encuentro.

Problema 12: Dos motociclistas corren en una ruta rectilínea, a través del campo, de 40 km de longitud. El primero recorre la ruta con una velocidad constante de 55 km/h. El segundo parte 3,5 min después del primero, pero cruza la línea final al mismo tiempo. ¿Con qué velocidad constante recorrió la ruta el segundo motociclista?

Problema 13: Dos corredores corren en sentidos opuestos acercándose, sobre una pista recta. Tienen velocidades constantes de 4,5 m/s y 3,5 m/s, respectivamente, cuando están separados por 100 m.
a) Escriba las ecuaciones horarias del movimiento de cada corredor.
b) Halle en qué instante se encuentran.
c) Determine en qué posición ocurre el encuentro.
d) Represente en un único esquema la posición versus el tiempo de cada corredor.

Problema 14: Un tren parte de Buenos Aires hacia Mar del Plata a una velocidad constante de 80 km/h. Una hora más tarde, un segundo tren parte, desde el mismo lugar y con el mismo destino, a una velocidad constante de 100 km/h.
a) Escriba las ecuaciones horarias de ambos trenes.
b) ¿Cuánto tiempo tardará el segundo tren en alcanzar al primero?
c) ¿A qué distancia de Buenos Aires se encuentran?
d) Represente gráficamente la posición versus el tiempo de cada tren.

Movimiento rectilíneo uniformemente variado

Problema 15: a) Un Volkswagen Beetle acelera de 0 a 100 km/h en 14,6 s mientras que un Ford Escort lo hace en 6,5 s. Calcule la aceleración de cada uno. b) Un colectivo que viaja a 25 km/h a lo largo de un camino acelera a 61 km/h en 8 s. ¿Cuál es la aceleración?

Problema 16: Si un automóvil que se mueve con una velocidad de 72 km/h a lo largo de un camino recto frena uniformemente hasta detenerse en 6 s, ¿cuál es la aceleración de frenado requerida?

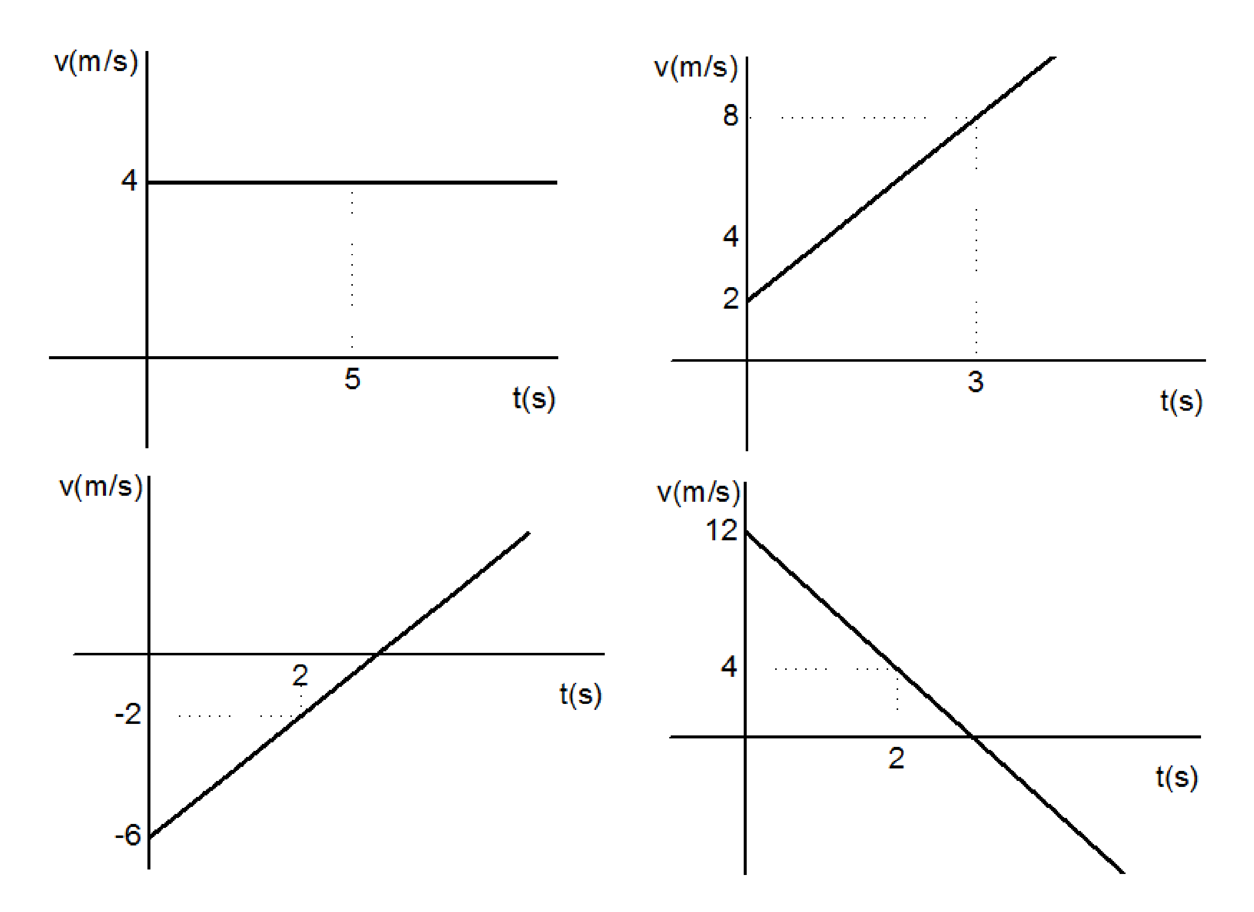
Problema 17: Suponga que una locomotora acelera uniformemente desde el reposo a razón de 2,25 m/s^2 a lo largo de unas vías rectas. a) Escriba una expresión de la velocidad de la locomotora en función del tiempo b) ¿Cuál es la velocidad 7 s después de la partida? c) Escriba una expresión de la posición de la locomotora en función del tiempo d) ¿Cuál es la distancia recorrida por la locomotora en esos 7 s?

Problema 18: Un avión parte del reposo con aceleración constante y carretea 1800 m por la pista durante 30 segundos hasta despegar. a) ¿Cuál es la aceleración del avión? b) ¿Con qué velocidad abandona la pista?
c) Trace el gráfico velocidad en función de tiempo mientras el avión carretea.

Problema 19: Un velocista parte del reposo y acelera durante 4 segundos con una aceleración constante de 3,5 m/s^2 hasta alcanzar su velocidad máxima.
a) Halle esa velocidad.
b) Halle su desplazamiento durante los intervalos de tiempo [0s, 1s] y [3s, 4s].
c) El mismo velocista, que viene moviéndose a la velocidad máxima alcanzada, frena con aceleración constante tardando 8 segundos en detenerse. Calcule su aceleración de frenado.

Problema 20: Un barco navega con una velocidad de 6,3 m/s en el instante en que sobrepasa una boya. Justo en ese momento comienza a aumentar su velocidad con una aceleración constante igual a 0,20 m/s^2. ¿Cuál será la distancia entre la boya y el barco cuando la velocidad de éste sea 8,6 m/s?

Problema 21: Los gráficos siguientes representan la velocidad que adquiere una bolita, en función del tiempo, al moverse en un camino rectilíneo (no necesariamente horizontal), en diferentes situaciones. Para cada uno de ellos se pide:
a) Determinar su aceleración y graficar *a(t)*.
b) ¿Qué representa el área bajo la gráfica velocidad vs tiempo, en el intervalo (2 s; 5 s)?
c) Escribir las ecuaciones horarias correspondientes, suponiendo que en $t = 0$ es $x = 0$.
d) Hallar las posiciones correspondientes a los instantes t = 1 s; 4 s; 5 s; 7 s. Representarlas en un diagrama *x(t)* y trazar el gráfico correspondiente.
e) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente al gráfico *x(t)* en el punto correspondiente a t = 1 s, y por qué?
f) ¿Qué representa el área bajo el gráfico aceleración vs tiempo, en el intervalo (2 s; 5 s)?
g) Describa, con sus palabras, como vería moverse a la bolita, en cada caso.

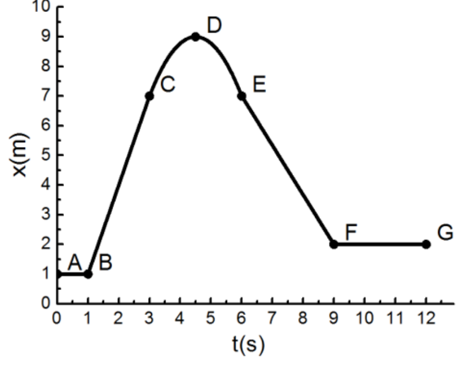


Problema 22: Responda las siguientes preguntas justificando en cada caso:

- Cuando la velocidad de un móvil es constante, ¿difiere la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo de la velocidad instantánea en cualquier instante?
- ¿Puede un cuerpo tener el módulo de la velocidad constante y, a pesar de eso, tener velocidad variable?
- ¿Puede un móvil tener su velocidad dirigida hacia el este mientras sufre una aceleración dirigida hacia el oeste?

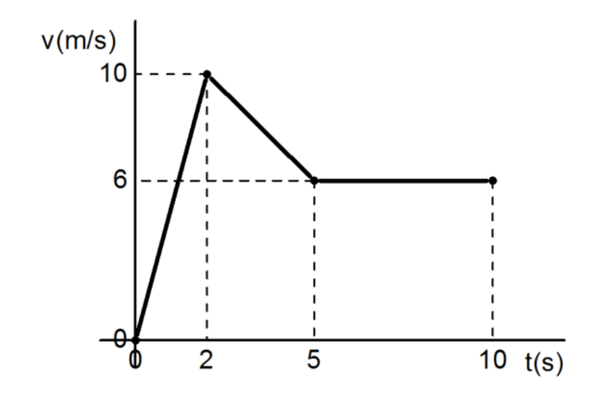
Problema 23: Un bote a motor que se mueve en línea recta disminuye uniformemente su velocidad de 70 km/h a 35 km/h, en una distancia de 50 m. Determinar su aceleración de frenado, y qué distancia recorrerá hasta detenerse si prosigue así.

Problema 24: En la figura se muestra un gráfico de posición en función del tiempo para un móvil en movimiento rectilíneo.
a) Calcule la velocidad media en los intervalos *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, y *BG*.
b) Establezca en qué intervalos el movimiento es uniforme.
c) Estime cuál es la velocidad instantánea en el punto *D*.

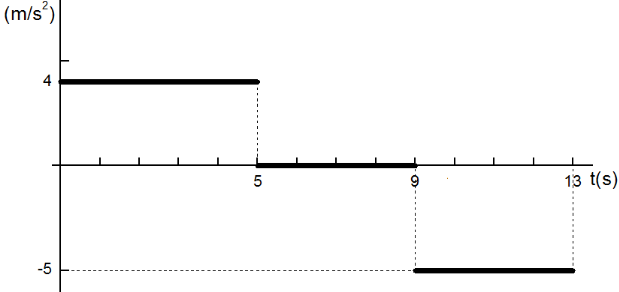


Problema 25: Un automóvil parte del reposo moviéndose con una aceleración constante de 1 m/s² durante medio minuto. El conductor en ese instante suelta un poco el acelerador de modo que ahora se mueve con velocidad constante durante un minuto. Finalmente clava los frenos desacelerándose a razón de 2 m/s² hasta detenerse.
a) Grafique la velocidad y la aceleración del automóvil en función del tiempo para esos mismos tramos.
b) Grafique la posición del automóvil en función del tiempo, desde el punto de partida hasta el instante en que el automóvil se detiene, es decir para los tres tramos del recorrido.
c) Calcule a cuántos metros del lugar de partida se detiene.

Problema 26: El gráfico representa la velocidad en función del tiempo que corresponde a un movimiento rectilíneo en tres etapas.
a) Encuentre la expresión de la aceleración en función del tiempo en cada etapa y represéntelas en un único gráfico.
b) Suponiendo que a $t = 0$ el móvil está en $x = 0$, encuentre la expresión de la posición en función del tiempo, determinando los valores correspondientes a los tiempos indicados, y represente x versus t en un único gráfico para cada intervalo.
c) Encuentre el camino recorrido en cada etapa.
d) Calcule la velocidad media del móvil, entre 0 y 10 s.



Problema 27: El gráfico representa la aceleración en función del tiempo de un micro, que parte del reposo y que luego de recorrer un camino rectilíneo se detiene.
a) Obtenga la expresión de la velocidad en función del tiempo para cada tramo y represéntelas en un único gráfico.
b) Encuentre la expresión de la posición en función del tiempo para cada tramo y represéntelas en un único gráfico.



Problema 28: Un automóvil y un camión parten del reposo al mismo tiempo en un camino recto, pero el auto está a una cierta distancia detrás del camión. Ambos se mueven con aceleración constante, de 4,4 m/s² el auto y de 3,7 m/s² el camión, y se cruzan cuando el auto se halla a 157 m del lugar de partida. Halle:
a) El tiempo que tarda el auto en alcanzar al camión.
b) La distancia que los separa inicialmente.
c) La velocidad de cada vehículo cuando están a la par.
d) Los gráficos de posición y velocidad en función del tiempo, para ambos móviles.

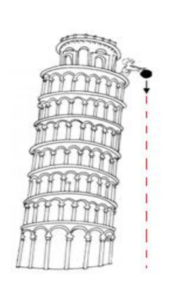
4. Caída Libre y Tiro Vertical

Caída Libre

Un ejemplo de MRUV es lo que se conoce por caída libre. Se observa experimentalmente que, si no hay resistencia del aire, todos los cuerpos, independientemente de su peso, tamaño y forma, caen con la misma aceleración en la misma región de la superficie terrestre. Además, si la distancia recorrida no es demasiado grande comparada con el radio de la Tierra, dicha aceleración es constante. Este movimiento (despreciando la resistencia del aire y la pequeña variación de la aceleración con la altura) lo llamamos **caída libre**.

¿Por qué pedimos que no haya resistencia del aire? Consideremos el siguiente experimento: se dejan caer simultáneamente una pluma y una bola de boliche; la bola llega al suelo antes que la pluma. Del resultado, se podría pensar que un cuerpo más pesado cae más rápido que uno liviano y, por lo tanto, no todos los cuerpos caerían con la misma aceleración. Aristóteles (350 a. C.) sostuvo esas ideas: pensaba que la aceleración de caída de un cuerpo es proporcional a su masa. ***Hoy sabemos que esto no es así:*** lo que no consideró Aristóteles es que el aire ejerce **fricción** sobre los cuerpos afectando su velocidad de caída.

Por muchos años se mantuvo la teoría de Aristóteles, hasta que alrededor del año 1600 **Galileo Galilei** demostró, mediante argumentos teóricos que, en ausencia de aire (vacío), l**a aceleración que adquiere un cuerpo no depende en absoluto de su masa, sino que es debida exclusivamente a la gravedad.** En vacío, la pluma y la bola de boliche caen al suelo al mismo tiempo. Cuenta la leyenda que Galileo realizó este experimento arrojando objetos de diferente peso desde la Torre de Pisa, mostrando que caían al mismo tiempo. Los historiadores dicen que no pudo realizar este experimento y que finalmente funcionó uno con planos inclinados y esferas (¡muchos años más tarde, el experimento se hizo!… miralo en https://www.youtube.com/watch?v=qERHCjh6Ak4).



La aceleración que experimenta cualquier cuerpo en caída libre se llama **aceleración de la gravedad.** Su dirección es vertical y su sentido es hacia abajo (hacia el centro de la Tierra). El módulo es prácticamente constante en la superficie terrestre, aunque hay una pequeña diferencia entre los polos y el ecuador:

$$g_{ec} = 9{,}78\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \qquad g_{polos} = 9{,}83\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A los fines de la resolución de problemas usaremos el valor aproximado de: $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

En cuanto a la cinemática (la descripción del movimiento), no es más que un caso particular de MRUV. Si el objeto "se deja caer" $v_{0y} = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la aceleración será $a = g$. Las ecuaciones horarias en este caso serán:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \qquad (4.1)$$

$$v_y(t) = g(t - t_0) \qquad (4.2)$$

donde el signo de la aceleración dependerá del sistema de referencia que se haya elegido. La trayectoria es una recta vertical. Por costumbre, se suele utilizar la coordenada *y* para el eje vertical (en lugar de la *x* que suele usarse en la horizontal). Esto no es más que "*tradición*" y no afecta en nada a la descripción del movimiento ni a la resolución de los problemas.

Ejemplo

Se deja caer una piedra desde una altura de 100 m ¿Cuánto tardará en llegar al piso? ¿Cuál será su velocidad, justo antes del impacto?

Escribimos la ecuación (4.1), considerando el punto desde donde se arroja la piedra como origen de coordenadas: $y_0 = 0$ m. Nuestro cronómetro arranca en ese momento: $t_0 = 0$ s. Tomaremos el sentido "hacia abajo" como positivo: $g = +10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (por supuesto, el signo + no es necesario escribirlo, sólo lo hacemos para resaltarlo).

Reemplazando: $y(t) = \frac{1}{2} 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$. Cuando llegue al piso su posición será $y(t_p) = 100$ m.

Entonces: $100\ \text{m} = \frac{1}{2} 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} {t_p}^2 \quad \rightarrow \quad t_p = \sqrt{\frac{2\ 100\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{20}\ \text{s} = 4{,}47\ \text{s}$

Ahora sabemos que "el momento del impacto" es $t_p = 4{,}47$ s.

Para la velocidad usamos la ecuación (4.2):

$$v(t) = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t.\ \text{Entonces:}\ v(4{,}47\ \text{s}) = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 4{,}47\ \text{s} = 44{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tiro Vertical

Obviamente, la aceleración de la gravedad no sólo afecta a los objetos que “se dejan caer” (en caída libre) sino a todos: los que se dejan caer, los que se arrojan hacia abajo, los que se tiran hacia arriba, etc. La diferencia con los anteriores ejemplos (caída libre) es que si "lo tiramos" tendremos que considerar la velocidad inicial v_{0y} de las ecuaciones de MRUV:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \qquad (4.3)$$
$$v_y(t) = v_{0y} + g(t - t_0) \qquad (4.4)$$

Vale destacar que las ecuaciones (4.1) y (4.2) no son más que un caso particular de estas últimas.

Además, como es sabido, "todo lo que sube baja": el objeto puede ir inicialmente hacia arriba, pero su velocidad será cada vez más próxima a cero (porque se le opone la aceleración de la gravedad que lo va frenando). En algún momento dejará de subir y empezará a caer. En ese instante la velocidad será nula y el objeto estará en el punto más alto de su trayectoria, generalmente llamada altura máxima y notada como $\mathbf{h_{max}}$. Por supuesto, podremos calcular la altura en cualquier momento de la trayectoria, pero lo particular de la altura máxima es que en ese momento (que llamaremos $t_{h_{max}}$) la velocidad v_y es nula. Para calcular cuándo pasa esto, tendremos que utilizar las ecuaciones de la velocidad (4.4) y de la posición (4.3). Entonces:

$$v_y(t_{h_{max}}) = 0 \qquad\qquad y(t_{h_{max}}) = h_{max}$$

Ejemplo

Martín arroja una pelota hacia arriba con una velocidad de 4 m/s. ¿Cuánto tarda la pelota en alcanzar la altura máxima? ¿Cuál será la altura máxima? ¿Qué velocidad instantánea tendrá la pelota al cabo de 0,2 s?

Consideramos el sentido positivo hacia arriba, el origen en las manos de Martín y el momento inicial, cuando parte la pelota. Con este sistema de referencia:

$y_0 = 0$ m; $v_{0y} = +4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $g = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $t_0 = 0$ s;

Las ecuaciones horarias (4.3) y (4.4) quedan:

$$y(t) = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}t - \frac{1}{2}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2\ ; \qquad v_y(t) = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$$

Como dijimos, la altura máxima se caracteriza porque $v_y = 0$:

$$v_y(t_{h_{max}}) = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t_{h_{max}} = 0 \ \rightarrow\ t_{h_{max}} = \frac{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}4\text{ s}$$

Para calcular la altura máxima reemplazamos en la ecuación horaria:

$$y(0{,}4\text{ s}) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}\ 0{,}4\,s - \frac{1}{2}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(0{,}4\text{ s})^2 = 0{,}8\text{ m} = 80\text{ cm}$$

(80 cm, medidos desde las manos de Martín).

Lo siguiente es calcular la velocidad instantánea al cabo de 0,2 s.

$$v_y(0{,}2\text{ s}) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ 0{,}2\text{ s} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo positivo de la respuesta nos indica que la pelota está subiendo, lo que es razonable, porque aún no había llegado a la altura máxima. ¿Para qué valores de tiempo debemos esperar resultados negativos para la velocidad?

El gráfico de posición en función del tiempo es una parábola, porque estamos en un caso de MRUV. Pero, igual que en los casos que estudiamos antes, la trayectoria sigue siendo una recta. La pelota que tira Martín sube y baja por la misma línea, cuando vuelve a la altura de las manos de Martín ($y = 0$), él no la agarra y sigue hacia el suelo (son los valores negativos de y).



Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 1 a 7 de la guía 2

5. Tiro Oblicuo

Anteriormente describimos movimientos horizontales y verticales de un objeto. Pero, ¿qué sucede si un objeto realiza los dos movimientos, es decir, si **además** de subir y bajar, se desplaza horizontalmente? El movimiento que observamos es la composición de un cambio de posición horizontal y otro vertical. La velocidad y la posición (que, recordamos, son vectores) tienen ahora dos componentes:

$$\vec{v} = (v_x;\ v_y) \qquad \vec{r} = (x; y).$$

El movimiento vertical (y) se ve afectado por la aceleración de la gravedad (MRUV) mientras que el movimiento horizontal (x) tiene velocidad constante (MRU). Llamando "y" al eje vertical y "x" al horizontal, las ecuaciones que describen las componentes de la posición en función del tiempo en este movimiento son las que habíamos estudiado en MRUV y MRU:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad (5.1)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \qquad (5.2)$$

donde $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}(\theta)$ y $v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$, siendo θ el ángulo formado entre el vector $\vec{v}_0$ y el eje x. La aceleración será la de la gravedad ($|g| = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ con el signo acorde al sistema de referencia elegido); x_0 , y_0 son las coordenadas (horizontal y vertical) de la posición inicial (correspondientes a t_0).

Como se dijo antes, la velocidad tiene dos componentes. La componente horizontal permanece constante:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos(\theta) \qquad (5.3)$$

mientras que la componente vertical siente el efecto de la aceleración de la gravedad:

$$v_y(t) = v_{0y} + a(t - t_0) = v_0 \operatorname{sen}(\theta) + a(t - t_0) \quad (5.4)$$

En muchas ocasiones nos resulta útil conocer el módulo de la velocidad (matemáticamente, es la longitud del vector; físicamente, es lo que nos marca el velocímetro):

$$v(t) = \sqrt{(v_{ox})^2 + \left(v_y(t)\right)^2}$$

Este cálculo podemos hacerlo para obtener la velocidad en cualquier momento, utilizando las componentes correspondientes. Sin embargo, si en lugar de dar las componentes del vector velocidad sólo damos su módulo, estaremos perdiendo información (sabemos cuánto marca el velocímetro, pero no hacia dónde va el auto). La información que falta está en la inclinación del vector (el ángulo). Para calcularlo, sabemos que

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_{0x}} \qquad \rightarrow \qquad \theta(t) = \operatorname{atan}\left(\frac{v_y(t)}{v_{0x}}\right)$$

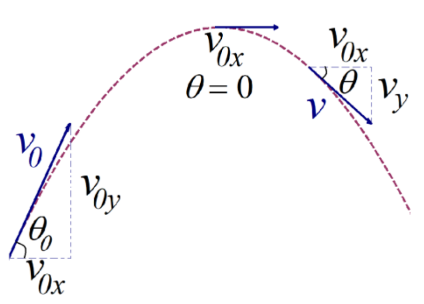


Figura 5.1: Componentes de la velocidad en un tiro oblicuo.

En los tiros oblicuos, al igual que en el tiro vertical, el cuerpo alcanza una altura máxima, que es el punto donde la componente y de la velocidad se anula**. OJO: la velocidad es un vector, lo único que se anula es la componente *y***. Es decir:

$$v_y(t_{h_{max}}) = 0 \quad \text{pero} \quad v_x(t_{h_{max}}) = v_{0x} \qquad \text{o sea} \qquad \vec{v}(t_{h_{max}}) = (v_o cos\,(\theta); 0)$$

Además, en muchas ocasiones resulta útil definir cuánto se desplazó el objeto sobre el eje horizontal en todo el trayecto: es lo que llamamos el **alcance** del tiro oblicuo.

En el caso particular de que la velocidad inicial sólo tenga componente x ($\theta_0 = 0°$), hablamos de **tiro horizontal** o decimos "*se arroja horizontalmente*". Entonces, el vector velocidad inicial es $\vec{v}_0 = (v_0;\ 0)$.

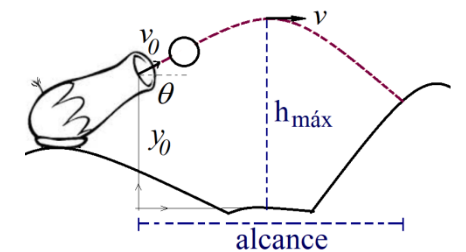


Figura 5.2: alcance y altura máxima en un tiro oblicuo (punteado azul).

Trayectoria en el tiro oblicuo

La trayectoria del objeto que describe un tiro oblicuo es una parábola. Para encontrar la ecuación que la describe debemos escribir la coordenada y como función de x; es decir hallar: $y(x)$. Sabiendo que:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \qquad \text{podemos despejar:} \qquad (t - t_0) = \frac{(x - x_0)}{v_{0x}}$$

y reemplazándolo en la ecuación (1) obtenemos:

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{a}{2\,v_{0x}^2}(x - x_0)^2 \qquad (5.5)$$

(Sugerencia: no pierdas tiempo tratando de memorizar esta ecuación; es más fácil volver a hacer la deducción).

Ejemplo 1

Juan patea una pelota que está en el suelo con una velocidad inicial de 28 m/s y un ángulo de 30°.
a) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en alcanzar la altura máxima?; b) ¿Cuál será la altura máxima?; c) ¿Cuándo estará la pelota a 6,6 m de altura?; d) ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
e) Encuentre la ecuación de la trayectoria.

Si elegimos como eje de coordenadas el que se muestra en la figura (sobre la pelota) en el momento en que la patea, las dos componentes de la velocidad inicial son positivas:

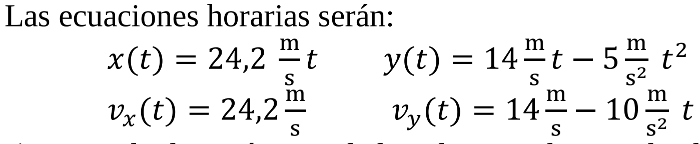
$v_{0x} = v_0 \cos(\theta) = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(30°) = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_{0y} = v_0\,\text{sen}(\theta) = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\text{sen}(30°) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$



En este sistema de referencia, la aceleración será $g = -10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Además, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Las ecuaciones horarias serán:



$$x(t) = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t \qquad y(t) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t^2$$

$$v_x(t) = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad v_y(t) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t$$



a) Para calcular cuánto tarda la pelota en alcanzar la altura máxima, planteamos:

$v_y(t_{h_{max}}) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t_{h_{max}} \quad \rightarrow \quad t_{h_{max}} = 1{,}4\ \text{s}$

b) Reemplazando el tiempo hallado en la ecuación para *y*, se obtiene la altura máxima:

$h_{max} = y(t_{h_{max}}) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,1{,}4\ \text{s} - \frac{1}{2}\,10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,(1{,}4\ \text{s})^2 \quad \rightarrow \quad h_{max} = 19{,}6\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m} = 9{,}8\ \text{m}$

c) Ahora nos preguntamos, ¿para qué valor de *t* se cumple que $y(t) = 6{,}6$ m? $6{,}6\ \text{m} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t - \frac{1}{2}\,10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t^2$

Al resolver esta cuadrática, se obtienen dos soluciones $t_1 = 0{,}6$ s y $t_2 = 2{,}2$ s. Como la pelota sube, alcanza la altura máxima (9,8 m) y finalmente baja, la respuesta al ítem c, es que alcanza una altura de 6,6 m a los 0,6 s mientras sube y a los 2,2 s mientras baja.

d) Recordemos que buscamos el **vector** velocidad. Tenemos que hallar las dos componentes en cada momento:

$v_x(0{,}6\ \text{s}) = v_{0x} = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_y(0{,}6\ \text{s}) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,0{,}6\ \text{s} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Entonces: $\vec{v}(0{,}6\ \text{s}) = (24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}};\ 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$

$v_x(2{,}2\ \text{s}) = v_{0x} = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_y(2{,}2\ \text{s}) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,2{,}2\ \text{s} = -8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Entonces: $\vec{v}(2{,}2\ \text{s}) = (24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}};\ -8\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$

e) La ecuación de la trayectoria es escribir *y*(*x*). Como $x(t) = 24{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{24{,}2\ \text{m/s}}$

Reemplazando en la ecuación $y(t) = y(\frac{x}{24{,}2\ \text{m/s}}) \quad \rightarrow \quad y(x) = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\frac{x}{24{,}2\ \text{m/s}} - 5\,\frac{m}{s^2}\,(\frac{x}{24{,}2\ \text{m/s}})^2$

$$y(x) = 0{,}58\,x - 0{,}0085\,\frac{1}{\text{m}}\,x^2$$

Ejemplo 2

Luis patea horizontalmente una pelota desde la terraza de un edificio a 25 m/s. Si la pelota llega al piso en 2,25 s: a) ¿Cuál es la altura de la terraza?; b) ¿Cuál es el alcance de la pelota?; c) ¿Con qué velocidad (módulo y dirección) llega al piso?

Tomando como origen de coordenadas el punto de partida de la pelota y las direcciones positivas hacia la derecha y hacia arriba, las ecuaciones horarias serán:

$$x(t) = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t \quad ; \quad y(t) = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t^2$$

$$v_x(t) = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ; \quad v_y(t) = -10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t$$

Rta.: a) la altura de la terraza es 25,31 m; b) toca el piso a 56,25 m del edificio, sobre la horizontal; c) llega con una velocidad de 33,63 m/s, inclinada casi a 42°; el vector velocidad es (25 m/s; -22,5 m/s).

****Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 8 a 16 de la guía 2****

Guía de Problemas N° 2: Movimiento en presencia de la gravedad

Caída libre y Tiro vertical

Problema 1: Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad de 12 m/s desde la cima de un edificio, inclinado el lanzador sobre el borde de modo tal que la pelota no choque con el edificio en su viaje de regreso. La pelota llega al piso 6,4 s después de haber sido lanzada.
a) Halle la altura máxima que alcanza la pelota.
b) Encuentre la altura del edificio.
c) Calcule la velocidad de la pelota en el instante en que llega al piso.

Problema 2: Se deja caer un objeto al mismo tiempo que otro es lanzado hacia abajo con una velocidad de 2 m/s. ¿Cuánto tiempo pasará para que la distancia entre ellos sea de 18 metros?

Problema 3: Un paracaidista que desciende en caída libre (antes de abrir su paracaídas) pasa por los puntos A y B de su trayectoria vertical con velocidades v_A = 10 m/s y v_B = 60 m/s. Halle la distancia AB que recorrió.

Problema 4: Se deja caer una piedra en el pozo de un aljibe. El sonido de la piedra al golpear el agua se escucha 6,5 s después. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, calcule la profundidad del pozo.

Problema 5: Desde una altura de 3 metros sobre la superficie de un estanque con agua se arroja una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 2 m/s. Una vez que ha llegado al agua la piedra sigue con un movimiento acelerado con $a = g/2$ (hacia abajo) debido al roce, y llega al fondo del estanque 2 segundos después de haber tocado la superficie del agua. Considere $g = 10\ m/s^2$. Calcule:
a) el tiempo de caída en el aire.
b) la velocidad con que la piedra llegó a la superficie del agua.
c) la profundidad del estanque.
d) la velocidad con que la piedra llegó al fondo del estanque.

Problema 6: Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Dos segundos después se lanza otra pelota hacia arriba con la misma velocidad. ¿A qué altura y en qué tiempo se encontrarán? ¿Cuáles serán sus velocidades cuando se encuentren? Grafique (en un único gráfico) la posición de cada una de las pelotas en función del tiempo.

Problema 7: Isaac se encuentra a 4 m de un árbol (medidos horizontalmente) cuando ve caer una manzana, que se encontraba a 5 m de altura. ¿A qué velocidad constante debe caminar Isaac para que la manzana caiga en sus manos? Esquematice la situación en el plano (x,y). Grafique $x(t)$ e $y(t)$ tanto para Isaac como para la manzana.

Tiro oblicuo

Problema 8: Desde una de las torres de una fortaleza de altura desconocida, una catapulta lanza continuamente grandes piedras con una velocidad de salida de 20 m/s y con una inclinación hacia arriba de 37^o con la horizontal. Si cada piedra tarda 5 s en caer.
a) ¿Cuál es la altura de la torre?
b) ¿A qué distancia horizontal del lanzamiento caen al piso?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzan las piedras?
d) ¿Con qué velocidad caen las piedras al piso?

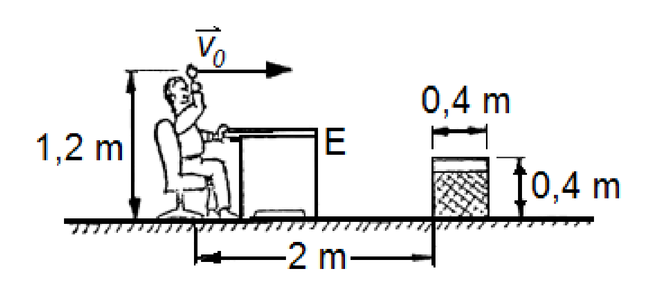
Problema 9: Indiana Jones lanza oblicuamente una flecha, desde una altura de 1,25 m y formando un ángulo de 53^o con la horizontal. La flecha vuela 2,5 segundos y se clava en un árbol que estaba situado a 45 metros delante del lugar de lanzamiento. Despreciando el efecto de la resistencia con el aire.
a) Calcule el módulo de la velocidad inicial, V_o, de lanzamiento.
b) ¿A qué altura del árbol se clavó la flecha?
c) Encuentre las componentes de horizontal y vertical de la velocidad y de la aceleración en el instante en que la flecha se clavó en el árbol
d) Escriba la ecuación de la trayectoria de la flecha.

Problema 10: Natalia arroja horizontalmente una pelota desde la ventana de su dormitorio que da a la calle en los altos de un edificio, y Federico lo recibe a 1,8 m de altura sobre el piso, 1,2 segundos después. Sabiendo que Federico se encuentra a 6 m del frente del departamento de Natalia, hallar:
a) ¿Desde qué altura del piso partió la pelota?
b) ¿Con qué velocidad llegó a las manos de Federico?
c) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de la pelota?

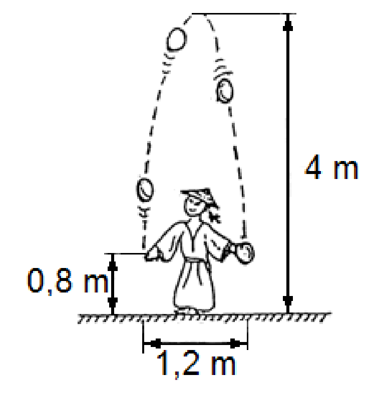
Problema 11: David Nalbandian se encuentra a 8 m de la red, e inicia el juego lanzando la pelota con una velocidad inicial horizontal, desde una altura de 2,15 m. Es tan hábil que logra que la pelota pase justo por el borde superior de la red que tiene 0,90 m de altura.
a) Haga un esquema de la situación y halle el tiempo que dura el vuelo de la pelota desde que es lanzada por el tenista hasta que pasa justo por encima de la red.
b) Halle la velocidad inicial de la pelota.
c) ¿A qué distancia de la red la pelota toca el suelo?

Problema 12: Resuelva las siguientes cuestiones justificando en cada caso:
a) ¿Puede existir un movimiento en dos dimensiones con aceleración en una sola dimensión?
b) ¿Puede un cuerpo tener velocidad nula y, a pesar de eso, estar acelerándose?

Problema 13: Un ejecutivo aburrido, se entretiene arrojando horizontalmente bollos de papel hacia el cesto que tiene frente a él al otro lado del escritorio, como se indica en el dibujo.
a) Teniendo en cuenta las dimensiones del cesto, hallar entre qué valores debe encontrarse el de la velocidad de partida de un bollo para que ingrese en el cesto.
b) Si el extremo *E* del escritorio está a 75 cm del piso, y a 1 m por delante del lugar de lanzamiento, determinar si un bollo que parte a 4 m/s le cae encima, cae al suelo o entra en el cesto. Justificar.



Problema 14: Un malabarista muestra su destreza, manteniendo continuamente en el aire cuatro platos. Los recibe con su mano izquierda, a 80 cm del piso, y los lanza con su mano derecha, desde la misma altura y a 1,2 m de donde los recibió. Los platos alcanzan una altura máxima de 4 m sobre el nivel del piso. Hallar:
a) ¿Con qué velocidad los arroja? (Sus componentes)
b) ¿Con qué velocidad pasan por el punto más alto?
c) ¿Con qué velocidad llegan a la mano izquierda? (Sus componentes)



Problema 15: Messi ejecuta un tiro libre, lanzando la pelota con un ángulo de 30^o con la horizontal y a una velocidad de 20 m/s. El *Pipa* Higuaín corre para alcanzar la pelota a velocidad constante partiendo al mismo tiempo que ella desde 20 m más adelante de la posición del tiro libre. Calcule con qué velocidad deberá correr Higuaín para alcanzar la pelota justo cuando ésta llegue al suelo.

Problema 16: Un jugador de rugby intenta un penal frente a los palos desde una distancia de 36 m. Si patea con una velocidad de 22 m/s y una inclinación de 45^o ¿Logrará el jugador convertir el penal? (En rugby, para que un penal sea válido, la pelota debe pasar por encima del travesaño horizontal que es sostenido por los postes verticales y que está a una altura de 3,1 m del piso).

Unidad II: Dinámica

6. Introducción. Leyes de Newton

La dinámica es la parte de la física que estudia las fuerzas que producen el movimiento. Hasta ahora describimos cómo se movía un cuerpo, pero no nos planteamos qué lo hace moverse. ¿Por qué algo que está quieto comienza a moverse? ¿Por qué algo que se está moviendo se detiene? En otras palabras ¿qué es lo que produce un cambio en la velocidad del cuerpo? La respuesta es: ¡**LA FUERZA**! La fuerza es la responsable de modificar el estado de movimiento de un cuerpo. ¿Pero qué es una fuerza? Una fuerza es el resultado de una **interacción entre distintos cuerpos**. Si dos cuerpos no interactúan, no hay fuerzas. En la naturaleza, las fuerzas en una interacción **siempre aparecen de a pares**: una actuando sobre un cuerpo y la otra actuando sobre el otro cuerpo. Por ejemplo, puede tratarse de una persona (cuerpo 1) que empuja o tira de un objeto (cuerpo 2). En este caso, la persona entra en contacto (en interacción) con el objeto. Sin embargo, para que exista una interacción (y aparezcan los pares de fuerzas) no es necesario que los dos cuerpos estén en contacto. Si ponemos un objeto de hierro (cuerpo 1) cerca de un imán (cuerpo 2), vemos que el objeto se mueve, es decir, adquiere velocidad, cambia su estado de movimiento pues, aunque no se toquen, entre ellos existe una interacción electromagnética. Otra fuerza, con la que estamos muy familiarizados, y que no necesita del contacto para "aparecer", es el peso: la fuerza con la que los objetos son atraídos hacia la Tierra (¿cuáles son los dos cuerpos en interacción en este caso?).

Por razones históricas, se han ido clasificando las fuerzas de distintas maneras. En este curso hablaremos sólo de "fuerzas de acción a la distancia" (como el peso, la fuerza electrostática, la fuerza magnética) y de "fuerzas de contacto" o de "vínculo" (alguien empujando un cuerpo o tirando de él con una soga). Hoy sabemos que esta clasificación es obsoleta y que todas las fuerzas observadas son producto de cuatro interacciones fundamentales que se estudiarán en materias más avanzadas: fuerza gravitatoria, fuerza electromagnética, fuerza nuclear fuerte y fuerza nuclear débil.

Es importante destacar que la fuerza es un **vector** y por lo tanto, en dos dimensiones, valen las siguientes relaciones:

$$\vec{F} = (F_x, F_y)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{y} \quad \tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$$

$$F_x = F\cos(\theta) \quad \text{y} \quad F_y = F\,\text{sen}(\theta)$$

Como es de imaginar, sobre un cuerpo pueden actuar muchas fuerzas (es decir, el cuerpo puede estar al mismo tiempo en interacción con otros varios cuerpos). Por ejemplo, un carro (cuerpo 1) puede ser tirado por muchos caballos (cuerpos 2, 3, 4). ¿Cómo cambiará el estado de movimiento del carro en este caso? La respuesta nos la indica la experiencia misma: ¡dependerá de hacia dónde y cómo tiran los caballos! O sea, el movimiento del carro dependerá de si tiran todos en el mismo sentido o en sentidos opuestos, si tiran con igual fuerza o no, etc. Es decir que el efecto que vamos a ver, lo que afectará al movimiento del cuerpo, es la fuerza total (la de todos los caballos juntos), también llamada **fuerza resultante**. Cuando la fuerza resultante es cero, decimos que el cuerpo está en equilibrio (por ejemplo, si dos caballos tiran del carro con igual fuerza y en sentidos opuestos, la resultante es cero y el carro no se mueve).

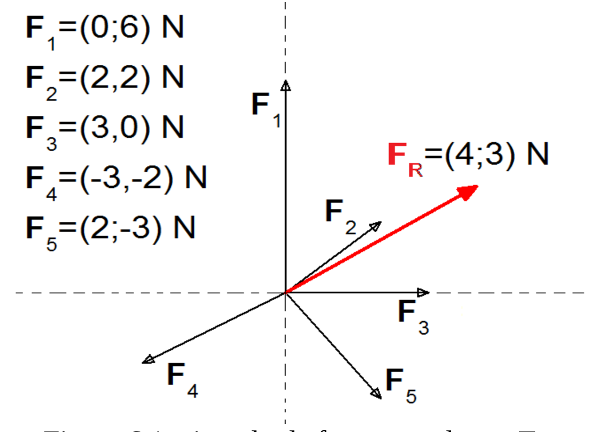


Figura 6.1: ejemplo de fuerza resultante $\mathbf{F_R}$

La unidad en que medimos la fuerza el sistema MKS es el newton (N).

Es importante recordar, a la hora de calcular la fuerza resultante, que estamos sumando vectores. Matemáticamente representamos la suma con la letra griega sigma mayúscula (Σ):

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_i^N \vec{F_i} \qquad (6.1)$$

Recordemos que los vectores se suman coordenada a coordenada, como se puede ver en el ejemplo de la Figura 6.1. Para hallar la resultante sobre un cuerpo, al igual que hicimos en cinemática, vamos a suponer

que los cuerpos son puntos. Es decir, no nos va a importar en qué parte del cuerpo está aplicada la fuerza (aunque en la realidad, esto sí es importante para determinar cómo se moverá un cuerpo).

Para analizar las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo y el efecto que ellas tienen, resulta útil hacer un esquema. Este esquema recibe el nombre de **diagrama de cuerpo libre**. En él, se representa cada fuerza aplicada sobre el cuerpo como un vector con su dirección y sentido. Si tenemos que analizar un sistema donde hay varios cuerpos, haremos **un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo**.

Dijimos antes que lo que cambia el **estado de movimiento** del cuerpo es la fuerza, pero no es una sola fuerza, sino la suma de las fuerzas aplicadas, **la fuerza resultante**.

Isaac Newton (alrededor del año 1660) estudió la relación entre las fuerzas y el movimiento y explicó mediante la formulación de tres leyes que la causa del movimiento es la interacción del cuerpo con otro cuerpo (no necesariamente en contacto). Veamos estas tres leyes:

Leyes de Newton

Ley de Inercia: "Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, si sobre él no actúan fuerzas o, si la suma de éstas (fuerza resultante) es nula."

La primera Ley de Newton nos dice que, si la fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es nula, éste mantendrá la velocidad que tenía. En el caso en que estuviese detenido ($v = 0$), permanecerá en reposo. Este último caso es un ejemplo muy intuitivo. De nuestra experiencia cotidiana todos sabemos que las cosas no se mueven solas. Si dejo una pelota, que está quieta, arriba de la mesa, voy a encontrarla en el mismo lugar, si nadie la toca, ni mueve la mesa, ni hay corrientes de aire, etc. La parte que no es tan fácil de imaginar es que, si alguien hace rodar la pelota sobre la mesa con un breve empujón y le da una velocidad de, por ejemplo, 1 m/s la pelota seguirá moviéndose a 1 m/s eternamente (o hasta que alguien la frene). Sabemos que eso no es lo que sucede: las cosas en algún momento se frenan. Y esto es porque es muy difícil encontrar, en la vida real, ejemplos en los que no haya fuerza resultante.

Ley de Fuerza: "La fuerza resultante es directamente proporcional a la aceleración y tiene igual dirección y sentido que ella."

El enunciado de esta ley es directamente traducible a una ecuación, y puede escribirse como:

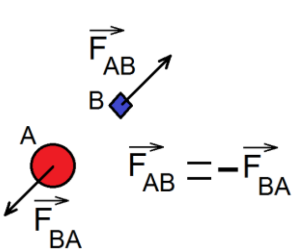
$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (6.2)$$

Puede verse que las dos primeras leyes van en perfecto acuerdo: si no hay fuerza resultante ($\vec{F}_R = 0$) entonces por la segunda ley, la aceleración también es nula ($a = 0$) y, por lo tanto, la velocidad es constante (el movimiento es un MRU) como afirma la primera ley. Observar que la aceleración no depende solamente de la fuerza resultante aplicada sino también de la masa del cuerpo. Por ejemplo, si se aplica la misma fuerza F para mover un auto (m_A) o una patineta (m_P), las aceleraciones que adquirirán ambos cuerpos serán distintas. ¿Podés decir en qué proporción?

Antes dijimos que la fuerza se mide en Newtons. Esta ley nos permite encontrar a qué equivale un Newton (que anotaremos con N): unidades de fuerza = unidad de masa* unidad de aceleración

$$[F] = [m]\,[a] \quad \rightarrow \quad \mathrm{N} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}$$

Estrictamente la segunda ley de Newton dice: *"La fuerza resultante es directamente proporcional a la variación del momento lineal."* El momento lineal es el producto de la masa por la velocidad, de modo que si pensamos en casos donde la masa sea constante, la variación de momento es proporcional a la variación de velocidad, o sea a la aceleración.



Ley de Acción y Reacción: "Cuando dos cuerpos interactúan, las fuerzas sobre cada uno de ellos son iguales en magnitud, iguales en dirección y opuestas en sentido".

Esta ley retoma lo que discutimos más arriba en la introducción: las fuerzas en las interacciones aparecen de a pares, nunca solas y nunca sobre el mismo cuerpo. Si un cuerpo (A) como el de la figura hace una fuerza sobre otro (B) a esa fuerza ($\vec{F}_{AB}$) le corresponde una igual y opuesta que el cuerpo B hace sobre A ($\vec{F}_{BA}$).

Toda fuerza (acción) tiene un par (reacción), SIEMPRE actuando sobre cuerpos diferentes (que son, justamente, los cuerpos que están en interacción). Como dijimos al principio del capítulo, en la naturaleza las fuerzas aparecen de a pares llamados par de interacción o par acción-reacción. **Cada fuerza del par de interacción actúa sobre un cuerpo distinto. (NOTA: ¡nunca en un diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas de UN SOLO cuerpo, puede aparecer un par de interacción!).**

Fuerza peso

Cuando estudiamos caída libre y tiro vertical, dijimos que los cuerpos caen libremente con la aceleración de la gravedad, que es aproximadamente 10 m/s^2 y que siempre apunta hacia abajo. La causa de esa aceleración es la fuerza **peso** (más adelante nos ocuparemos de estudiar mejor el origen de esta fuerza). Para calcular el peso de un cuerpo, basta multiplicar su masa por la aceleración de la gravedad: $\vec{P} = m\vec{g}$ (la segunda Ley de Newton nos muestra que la aceleración será $\vec{g}$, despreciando la resistencia del aire).

Ojo: En el lenguaje cotidiano estamos habituados a mezclar dos conceptos que físicamente son bien diferentes: la masa y el peso. La **masa** es la cantidad de materia que tiene un cuerpo y se mide en kg (o algún múltiplo o equivalente); es **una magnitud escalar**. El **peso** es la fuerza de atracción que existe entre un objeto y la Tierra; como cualquier fuerza se mide en newton (N) y es **un vector**. La masa es una propiedad intrínseca del cuerpo: un kilo de manzanas es un kilo de manzanas, en la Tierra, en Júpiter, en Marte o en cualquier rincón del Universo. El peso es producto de la interacción de un cuerpo y el planeta correspondiente. Un kilo de manzanas pesa 10 N en la Tierra, 24,8 N en Júpiter y 3,7 N en Marte.

Fuerza normal

Cuando un cuerpo está apoyado sobre una superficie, hay una interacción entre la superficie y el cuerpo, y por tanto aparecerá una fuerza en el cuerpo y su par en la superficie. Dicha fuerza es perpendicular a la superficie de contacto, se llama **fuerza normal**[2] y pertenece al grupo de fuerzas de vínculo: es decir, la fuerza normal toma el valor necesario para que el cuerpo permanezca sobre la superficie. No tiene un valor determinado ni una fórmula para calcularse, pero su valor se halla resolviendo la 2da ley de Newton.

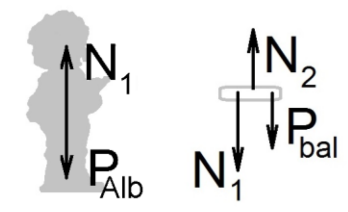
Ejemplo 1

Alberto, cuya masa m = 80 kg, quiere hacer una medición de su peso en un ascensor. Se sube al mismo con una balanza en el piso 28; coloca la balanza en el piso del ascensor, se para sobre ella y aprieta el botón de planta baja. El ascensor acelera a 2 m/s^2 durante los primeros 3 s, luego continúa a velocidad constante durante 11 s y frena a razón de 2 m/s^2 los últimos 3 s, hasta detenerse en planta baja. ¿Alberto pesará diferente en cada etapa del trayecto? ¿Cuánto cambia el indicador de la balanza en cada etapa del trayecto?



No es necesario saber de física para darse cuenta que Alberto pesará lo mismo en todo el trayecto. Su peso, $P_{Alb} = m_{Alb}g$, depende de su masa y no perderá ni medio gramo de su masa al subir al ascensor. Sin embargo, puede mirar el indicador de la balanza y ver que mide…

Empecemos dibujando los diagramas de cuerpo libre de Alberto y la balanza. Lo primero que debemos tener en cuenta es que lo que muestra la balanza como "peso" de Alberto es lo que en el dibujo llamamos N_1, porque es la fuerza de contacto que Alberto ejerce sobre la balanza. Su par acción-reacción es la fuerza que la balanza ejerce sobre Alberto y, como tiene el mismo módulo, la llamamos con el mismo nombre.



Escribimos a continuación la ecuación de la 2da ley de Newton. Para resolver este problema, solo será necesario escribir la ecuación que corresponde a Alberto y elegimos como sistema de referencia positivo hacia arriba: $N_1 - P_{Alb} = m_{Alb}a_{Alb}$

Lo siguiente que tenemos que tener en cuenta es que Alberto está arriba del ascensor y, por lo tanto, se mueve solidario con él: su aceleración será la misma que la del ascensor y tendrá tres etapas diferentes.

a) el ascensor baja acelerando. En nuestro sistema de referencia $a = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b) el ascensor baja con velocidad constante: $a = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

c) el ascensor baja frenando. En nuestro sistema de referencia $a = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Es decir que la balanza indicará tres valores diferentes:

a) $N_1 = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}m_{Alb} + 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}m_{Alb} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}m_{Alb}$

---

[2] Recordemos que en geometría normal significa perpendicular.

b) $N_1 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} m_{Alb} = P_{Alb}$
c) $N_1 = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} m_{Alb} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} m_{Alb} = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} m_{Alb}$

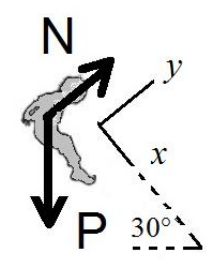
En el tramo b) la balanza indicará el valor real del peso de Alberto. Los primeros tres segundos marcará un 20% menos, pero durante los tres últimos segundos marcará un 20% más!

Ejemplo 2



Martina pesa 250 N y se deja caer por un tobogán de 30° de pendiente. ¿Cuál es su aceleración? ¿Cuál será la de su hermanito Facundo, que pesa la mitad?

Primero hacemos el diagrama de cuerpo libre y elegimos los ejes.



Al elegir el eje x como la dirección del movimiento, la aceleración tendrá solo componente x y las cuentas serán más simples ($a_y = 0$ m/s^2). En cambio, tendremos que descomponer la fuerza peso (usando un poco de trigonometría), como se esquematiza en la figura.

Luego, planteamos de la 2da ley de Newton:

$x \rightarrow \quad P_x = ma$
$y \rightarrow \quad N - P_y = 0$

Como puede verse de la figura de la derecha:
$P_x = P\ \mathrm{sen}(\alpha)$ y $P_y = P\cos(\alpha)$

o, lo que es lo mismo,
$P_x = P\cos(90° - \alpha)$ y $P_y = P\ \mathrm{sen}(90° - \alpha)$

Entonces, podemos reescribir la 2da ley de Newton:

$x \rightarrow \quad P_x = ma \qquad y \rightarrow \quad N - P_y = 0$
$x \rightarrow \quad P\ \mathrm{sen}(\alpha) = ma \qquad y \rightarrow \quad N - P\cos(\alpha) = 0$

Como el enunciado de nuestro problema sólo nos pregunta la aceleración, no necesitamos más que la ecuación en *x*: $mg\ \mathrm{sen}(\alpha) = ma$.
Acá se ve que la masa de Martina aparece en los dos lados de la ecuación y por lo tanto se puede simplificar. Entonces: $a = g\ \mathrm{sen}(\alpha) = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \mathrm{sen}(30°) = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

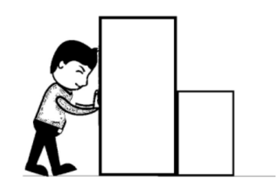
La respuesta a la segunda pregunta es exactamente igual, porque la aceleración depende de la inclinación del tobogán y no de la masa.

**** Con los conceptos explicados en esta clase pueden resolver los ejercicios 1 a 12 de la guía 3****

7. Cuerpos vinculados

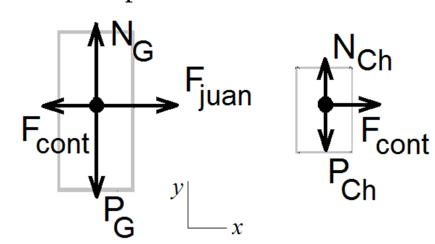
Si dos cuerpos están en contacto y no existe rozamiento entre ellos, decimos que se mueven solidarios uno con otro. "Solidario" indica que se mueven "juntos". Sus velocidades serán iguales en todo momento: si cambia una, cambia la otra. Si las velocidades cambian de la misma manera, ambos cuerpos tendrán la misma aceleración. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1



Juan tiene que mover unas cajas de una punta a otra de la oficina. Para ahorrar tiempo las coloca como muestra la figura. La caja grande tiene una masa de 15 kg y la chica de 5 kg. Juan realiza una fuerza horizontal de 250 N. ¿Cuál es la aceleración del sistema y cuánto vale la fuerza de contacto entre las cajas?

El primer paso siempre es hacer un diagrama de cuerpo libre (DCL) y plantear la 2da ley de Newton para cada cuerpo:



$$\text{caja grande}\{x: F_{juan} - F_{cont} = m_G a_{Gx} \quad y: \quad N_G - P_G = m_G a_{Gy}$$
$$\text{caja chica} \quad \{x: \quad F_{cont} = m_{Ch} a_{Chx} \quad y: \quad N_{Ch} - P_{Ch} = m_{Ch} a_{Chy}$$

En los DCL dibujados sólo hay dos fuerzas que son par acción reacción ¿cuáles? ¿Dónde están los pares de acción-reacción de las restantes?

Las dos cajas se mueven sobre el eje x, por lo tanto, sobre el eje y su posición y velocidad son constantes y la aceleración es cero: $a_{Gy} = 0$ m/s^2 y $a_{Chy} = 0$ m/s^2. Además, las cajas se mueven juntas, por lo tanto, como dijimos anteriormente, tienen igual velocidad y aceleración: $a_{Gx} = a_{Chx} = a$. Recordando que el peso se calcula como masa*gravedad. Las ecuaciones quedan:

$$F_{juan} - F_{cont} = m_G a \qquad \text{(e1)}$$
$$N_G - m_G g = 0 \qquad \text{(e2)}$$
$$F_{cont} = m_{Ch} a \qquad \text{(e3)}$$
$$N_{Ch} - m_{Ch} g = 0 \qquad \text{(e4)}$$

Es un sistema con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas (F_{cont}, a, N_G y N_{Ch}). Ahora bien, el problema nos pide calcular aceleración y fuerza de contacto, por lo que solo usaremos las ecuaciones e1 y e3:

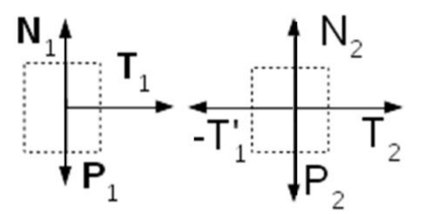
$$250\text{ N} - F_{cont} = 15\text{ kg } a \qquad \text{(e1)}$$
$$F_{cont} = 5\text{ kg } a \qquad \text{(e3)}$$
$$250\text{ N} - F_{cont} + F_{cont} = 15\text{ kg } a + 5\text{ kg } a \qquad \text{(e1) +(e3)}$$
$$250\text{ N} = 20\text{ kg } a \qquad \text{(e1) +(e3)}$$
$$a = 12{,}5\,\frac{m}{s^2} \qquad F_{cont} = 62{,}5\text{ N}$$

Sogas: En todos nuestros análisis vamos a suponer que todas las sogas son ideales. Eso implica que sólo transmiten fuerzas, la masa es despreciable y la longitud no varía, es decir permanece tensa y es inextensible. Si dos cuerpos están unidos por una soga ideal, entonces, la distancia entre ellos deberá ser siempre la misma. Por lo tanto, si un cuerpo cambia su velocidad, lo mismo hará el otro. Si sus velocidades son iguales en todo momento, ambos cuerpos tendrán, además, la misma aceleración. Por eso, al resolver problemas con cuerpos unidos por sogas, como sucedía en el caso de cuerpos en contacto, podemos reemplazar la aceleración de cada uno (a_1, a_2, a_3, etc.) con una única a, que a veces se llama aceleración del sistema.

A la fuerza que se transmite con la soga la llamamos **Tensión.** La dirección de la tensión es la misma que la soga. Veamos cómo son las tensiones en el siguiente ejemplo.

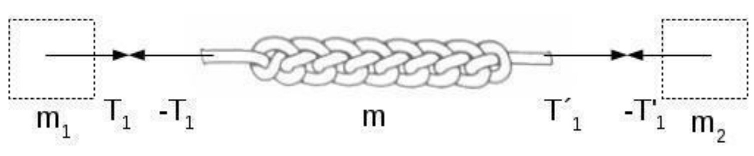
Ejemplo 2

Supongamos que tenemos dos cuerpos (m_1 y m_2) unidos por una soga, que son arrastrados horizontalmente como muestra la figura. Veamos cómo son las tensiones sobre cada cuerpo.



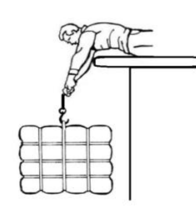
Dibujamos para cada cuerpo un DCL. Sobre el cuerpo 1, además del peso y la normal, tenemos la tensión que ejerce la soga: la llamamos T_1. Notar que la mano que arrastra el cuerpo 2, no ejerce acción directa sobre el cuerpo m_1. Para el cuerpo m_2 tenemos, además del peso y la normal, la

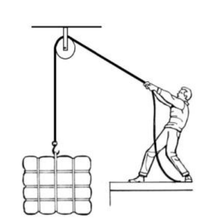
acción de la mano que tira hacia la derecha (en el dibujo la llamamos $\boldsymbol{T_2}$), y la fuerza que hace la soga (que está atada al cuerpo m_1) y apunta hacia la izquierda: la llamamos $\boldsymbol{-T'_1}$. Veamos qué relación existe entre $\boldsymbol{T_1}$ y $\boldsymbol{-T'_1}$.



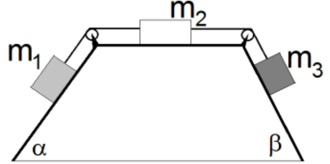
¿Qué pasa con la soga que une los dos cuerpos? Consideremos un pedazo de soga (de masa m_s) situado entre los cuerpos m_1 y m_2. La soga siente la reacción de $\boldsymbol{-T'_1}$ que tendrá igual dirección y sentido opuesto ($\boldsymbol{T'_1}$) y del otro lado siente la reacción de $\boldsymbol{T_1}$ también con igual dirección y sentido opuesto ($\boldsymbol{-T_1}$).
La segunda Ley de Newton para la soga será: $T'_1 - T_1 = m_s a$.
Pero dijimos que una soga ideal tiene masa despreciable: $m_s = 0$. Por lo tanto: $T'_1 - T_1 = 0$ y $T'_1 = T_1$.
La tensión $\boldsymbol{T_1}$ es transmitida por la soga.

Poleas: Una polea es una máquina simple que permite transmitir una fuerza cambiando la dirección. Por ejemplo, para levantar el paquete de la figura moviéndolo a velocidad constante el hombre deberá ejercer una fuerza igual al peso del objeto, pero usando la polea, ejerce la fuerza en una posición más cómoda (con menor esfuerzo). Análogamente a lo que hicimos con la soga, vamos a considerar una polea ideal: la masa es despreciable y no hay fuerzas de fricción entre la soga y la polea.

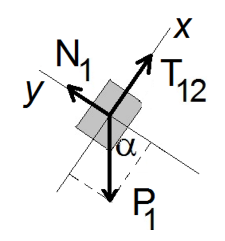


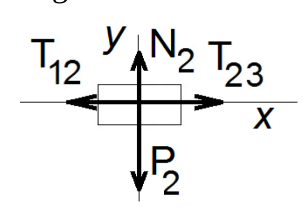


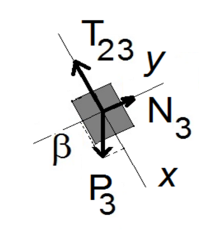
Ejemplo 3
En el sistema de la figura las masas 1, 2 y 3 valen 8, 10 y 5 kg respectivamente. El ángulo α es 37° y el ángulo β es 60°. Despreciando el rozamiento en todas las superficies, calcule la aceleración de cada masa y la tensión en cada soga.



Comenzamos dibujando el diagrama de cuerpo libre (DCL) y escribiendo las ecuaciones:







cuerpo 1, x: $T_{12} - m_1 g \operatorname{sen}(\alpha) = m_1 a_1$ $\quad y$: $N_1 - m_1 g \cos(\alpha) = 0$
cuerpo 2, x: $-T_{12} + T_{23} = m_2 a_2$ $\quad y$: $N_2 - m_2 g = 0$
cuerpo 3, x: $m_3 g \operatorname{sen}(\beta) - T_{23} = m_3 a_3$ $\quad y$: $N_3 - m_3 g \cos(\beta) = 0$

Para hallar lo que nos pide el problema nos alcanza con las ecuaciones en x, recordando que las tres aceleraciones son iguales:

$$T_{12} - m_1 g sen(\alpha) = m_1 a \quad \text{(e1)}$$
$$-T_{12} + T_{23} = m_2 a \quad \text{(e2)}$$
$$m_3 g sen(\beta) - T_{23} = m_3 a \quad \text{(e3)}$$

sumando miembro a miembro:

$$-m_1 g sen(\alpha) + m_3 g sen(\beta) = (m_1 + m_2 + m_3) a \qquad \text{(e1) + (e2) + (e3)}$$

De donde despejamos: $$a = \frac{-m_1 g sen(\alpha) + m_3 g sen(\beta)}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \text{(e4)}$$

Entonces, $a = -0{,}21 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Reemplazando en las ecuaciones anteriores obtenemos:

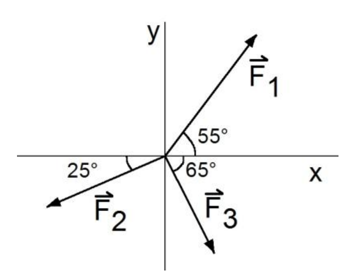
$T_{12} = 46{,}46$ N (de la ec. e1) y $T_{23} = 44{,}35$ N (de la ec. e2 ó e3).

El signo de la aceleración indica que el sentido es hacia la izquierda. Ojo: podría ser porque el sistema se estuviese moviendo hacia la izquierda, acelerando o podría estar moviéndose hacia la derecha frenando. El signo de la aceleración, por sí solo no me indica la dirección de la velocidad.

Mirando la ecuación e4: ¿Qué pasaría si reemplazamos la masa 3 por otra, mucho más grande? ¿y si reemplazamos la masa 2 por una mucho mayor?

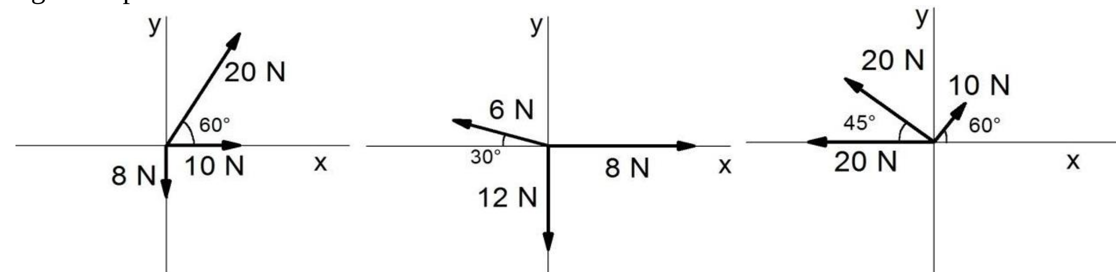
**** Con los conceptos explicados en esta clase pueden resolver los ejercicios 13 a 22 de la guía 3****

Guía de Problemas N° 3: Dinámica. Leyes de Newton



Problema 1: En el diagrama puntual mostrado en la figura, los módulos de las fuerzas actuantes son F_1 = 22 N, F_2 = 18 N y F_3 = 16 N.
Determine las componentes de cada una de las fuerzas.
Determine las componentes de la fuerza resultante.
Halle el módulo, dirección y sentido de la fuerza resultante.

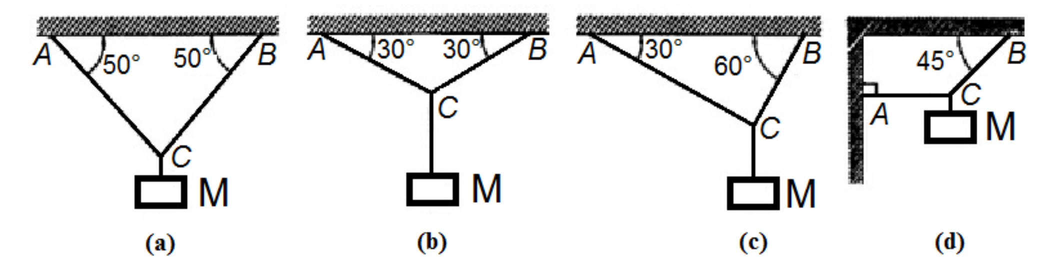
Problema 2: Halle el módulo y la dirección de la fuerza resultante de los sistemas de fuerzas representados en los siguientes diagramas puntuales



Problema 3: Un poste de teléfono se mantiene vertical mediante dos cables que se fijan al poste a una altura de 10 m y al piso a una distancia de 7 m de la base del poste, en direcciones opuestas. Si la tensión de cada cable es de 500 N, ¿cuáles son las fuerzas vertical y horizontal que ejerce cada uno sobre el poste? ¿Qué otras fuerzas mantienen al poste en equilibrio?

Problema 4: Al saltar de un avión, un acróbata aéreo cuyo peso es de 720 N, alcanza una velocidad esencialmente constante. En esta situación hay dos fuerzas significativas que se ejercen sobre el saltador. a) ¿Cuáles son esas fuerzas? b) ¿Cuáles son la dirección y el módulo de cada una de ellas?

Problema 5: Determine el módulo de la tensión en las cuerdas *AC* y *BC* si *M* tiene una masa de 40 kg.



Problema 6: Un trabajador empuja horizontalmente un cajón y experimenta una fuerza neta de 100 N. Si el cajón se mueve con una aceleración de 0,75 m/s^2, ¿cuál es su peso?

Problema 7: Un automóvil de 1800 kg es remolcado por otro automóvil mediante una cuerda horizontal. Si los automóviles se aceleran con una aceleración de 1,55 m/s^2, encuentre la tensión en la cuerda.

Problema 8: Si estuviéramos en otro planeta, definiríamos el peso de un objeto como la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre dicho objeto. En Marte, la aceleración de un objeto en caída libre es de 3,8 m/s^2. ¿Cuál es el peso en Marte de una persona de 68 kg?

Problema 9: Una fuerza horizontal de 12 N actúa sobre un objeto que descansa sobre una superficie plana sin fricción en la Luna, en donde el objeto tiene un peso de 98 N. Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la Luna es 1,6 m/s^2

a) ¿cuál es la aceleración del objeto?
b) ¿Cuál sería la aceleración del mismo objeto en una situación similar en la Tierra?

Problema 10: Dos automóviles de 1600 kg viajan a 90 km/h en un camino plano y recto y ambos se llevan con aceleración constante al reposo. El primer auto lo hace en 5 s y el segundo tras recorrer 50 m. ¿Cuál es la magnitud y el sentido de la fuerza de frenado para cada uno?

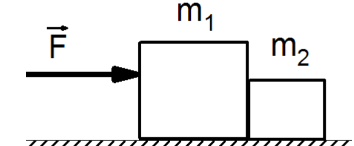
Problema 11: Un obrero empuja un carrito cargado, de modo que la fuerza resultante sobre el mismo es de 300 N. Como consecuencia, el carrito adquiere una aceleración de 2,5 m/s^2. Hallar la masa del carrito con carga. Si ahora se quita carga de modo que la masa se reduce a la tercera parte, y se duplica la fuerza resultante que actúa sobre el carro, hallar la nueva aceleración del carrito.

Problema 12: Un bloque de 5 kg en reposo, recibe la acción de las fuerzas que se ilustran en la figura cuyos módulos son F_1 = 5,5 N y F_2 = 3,5 N,

a) ¿Qué aceleración adquiere el bloque?

b) ¿Cuál es el valor de la fuerza que la superficie le ejerce al bloque?

Problema 13: Se tienen dos cuerpos en contacto sobre una mesa: m_1 = 2 kg y m_2 = 1 kg. A uno de ellos se le aplica una fuerza $\vec{F}$ de módulo 3 N como indica la figura.



a) Encuentre la aceleración de los bloques y la fuerza de contacto entre ellos.

b) Demuestre que si se aplica la misma fuerza F al bloque 2 en lugar de al bloque 1, la fuerza de contacto no tiene el mismo valor que el obtenido en a). Explique por qué sucede esto.

Problema 14: Indique la respuesta correcta:

a) En ausencia de una fuerza neta, un objeto estará siempre: ***i)*** en reposo, ***ii)*** en movimiento con velocidad constante, ***iii)*** acelerado, ***iv)*** ninguno de éstos.

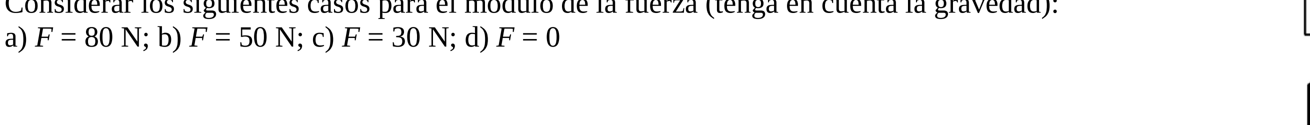
b) La 2° ley de Newton establece que la aceleración de un objeto sobre el que actúa una fuerza neta es: ***i)*** inversamente proporcional a su masa, ***ii)*** cero, ***iii)*** directamente proporcional a su masa, ***iv)*** independiente de su masa.

c) La unidad de fuerza Newton es equivalente a: ***i)*** kg.m/s, ***ii)*** kg.m/s^2, ***iii)*** kg.m^2/s, ***iv)*** ninguno de éstos.

d) El par de fuerzas de la tercera ley de Newton: ***i)*** consiste en fuerzas que siempre son opuestas, pero algunas veces no son iguales, ***ii)*** siempre se cancelan una a la otra cuando se aplica la segunda ley a un cuerpo, ***iii)*** siempre actúan sobre el mismo cuerpo, ***iv)*** consisten en fuerzas que son idénticas tanto en magnitud como en dirección, pero actúan sobre diferentes objetos.

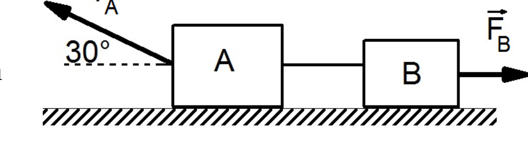
Problema 15: El sistema de los dos bloques de la figura, cuyas masas son m_A = 3 kg y m_B = 2 kg respectivamente, se está moviendo hacia arriba. Determinar el valor de la aceleración y la magnitud de la fuerza que soporta la soga s1 cuando se tira de la soga s2 con una fuerza F como se indica en la figura. Considerar los siguientes casos para el módulo de la fuerza (tenga en cuenta la gravedad):

a) F = 80 N; b) F = 50 N; c) F = 30 N; d) F = 0



Problema 16: Dos bloques cuyas masas son m_A = 15 kg y m_B = 5 kg están sometidos a dos fuerzas cuyos módulos son F_A = 220 N y F_B = 100 N como se indica en la figura.





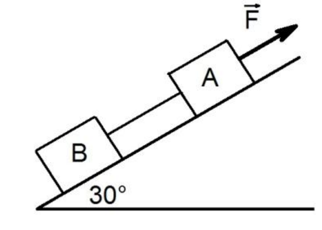
a) Haga el diagrama de cuerpo libre de cada bloque.

b) Plantee las ecuaciones que surgen de aplicar la 2da ley de Newton para cada bloque.

c) Encuentre la aceleración del sistema.

d) Halle la tensión en la soga.

Problema 17: Dos bloques cuyas masas son m_A = 50 kg y m_B desconocida son arrastrados por una fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo es de 450 N, tal como se indica en la figura.

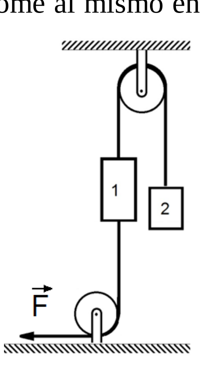


a) Encuentre el valor de la masa del bloque m_B que le permita al sistema ascender con una velocidad constante.

b) Halle el valor de la tensión en la cuerda que une ambos bloques. (Recuerde hacer el diagrama de cuerpo libre de cada bloque y plantear las ecuaciones que surgen de aplicar la 2da ley de Newton para cada bloque.)

c) Analice las fuerzas que actúan sobre cada bloque en términos de la 3ra ley de Newton, es decir indicando cuales fuerzas forman pares interacción (acción-reacción). Considere a la Tierra como parte del sistema y tome al mismo en equilibrio estático

Problema 18: En el sistema de la figura, que presenta rozamiento despreciable en las poleas y en el plano, las masas de los cuerpos son m_1 = 40 kg y m_2 = 60 kg y la fuerza F es desconocida. Haga los diagramas de cuerpo libre de cada cuerpo y determine:



a) La intensidad de la fuerza F necesaria para que el sistema se mueva con velocidad constante.

b) La tensión en la cuerda en este caso.

c) La intensidad de F' necesaria para que los cuerpos se aceleren a razón de 2 m/s^2, y la tensión de la cuerda en este caso.

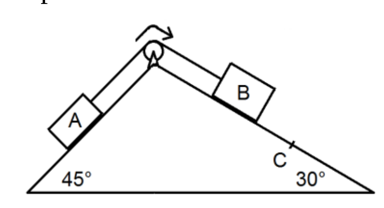
d) Si se deja de aplicar la fuerza, F ¿cuál es la tensión que soporta la cuerda, la aceleración y el sentido del movimiento un instante después?

Problema 19: En el esquema de la figura, los bloques *A* de 60 kg y *B* de 40 kg se mueven en el sentido indicado, vinculados por una cuerda de masa despreciable. Puede despreciarse también la masa de la polea.

a) En las condiciones dadas, hallar la intensidad y sentido de la aceleración de los bloques, y la tensión que soporta la cuerda.

b) Cuando el bloque *B* pasa por el punto *C* se corta la cuerda. Calcular la nueva aceleración de cada uno.

c) Describir el movimiento de cada bloque, desde el instante inicial hasta que llegan al piso. Esbozar los gráficos posición vs. tiempo.



Problema 20: Una persona, cuya masa es 70 kg, se encuentra parado en un ascensor. ¿Qué fuerza ejerce el piso sobre la persona cuando el ascensor está: a) en reposo, b) moviéndose con una aceleración hacia arriba de 0,525 m/s^2, c) moviéndose con una aceleración hacia debajo de 0,525 m/s^2, d) subiendo con velocidad uniforme, e) bajando con velocidad uniforme, f) se rompen los cables del ascensor y cae libremente?

Problema 21: Cuando el sistema que muestra la figura es soltado desde el reposo, la aceleración observada para *B* es 3 m/s^2 hacia abajo. Despreciando la masa de la polea determine:

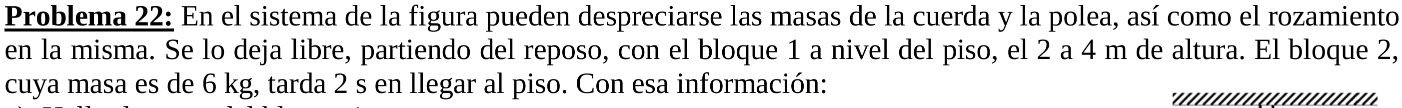
a) La tensión en la cuerda.

b) La masa del bloque *B*.

c) Suponga ahora que el sistema de la figura es soltado cuando h = 1,4 m. Determine la masa del bloque *B* sabiendo que cuando llega al piso lo hace con una velocidad de 3 m/s.

d) ¿Qué dificultad encuentra si intenta resolver (c) considerando que la velocidad final es 6 m/s ?

e) Si al sistema se lo suelta desde el reposo y se sabe que la masa de *B* es 30 kg, determine cuanta distancia se recorre hasta alcanzar la velocidad de 2,5 m/s.



Problema 22: En el sistema de la figura pueden despreciarse las masas de la cuerda y la polea, así como el rozamiento en la misma. Se lo deja libre, partiendo del reposo, con el bloque 1 a nivel del piso, el 2 a 4 m de altura. El bloque 2, cuya masa es de 6 kg, tarda 2 s en llegar al piso. Con esa información:

a) Hallar la masa del bloque 1.

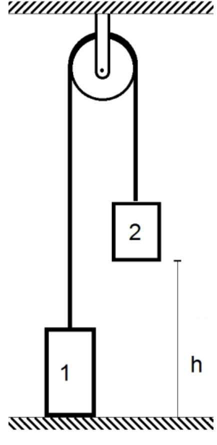
b) Hallar con qué velocidad llegó al piso el bloque 2.

c) Hallar la altura máxima sobre el piso que alcanzará la base del bloque 1.

d) Hallar la fuerza que soporta el techo.

e) Graficar la intensidad de la fuerza que soporta la cuerda, en función del tiempo, hasta que el bloque 2 comienza a subir.

f) Graficar la aceleración del bloque 1 en función del tiempo, en el mismo intervalo.



8. Dinámica con rozamiento

Nuestra experiencia cotidiana nos muestra que un objeto en movimiento eventualmente se detiene "por sí solo". Sin embargo, la primera ley de Newton nos asegura que "*Todo cuerpo permanece en su estado de movimiento rectilíneo uniforme, si la fuerza resultante sobre él es nula*." Es decir, que si se detiene es porque hay alguna fuerza actuando sobre él, (¡y actúa en sentido contrario a su movimiento!). Esta fuerza, cuyo efecto observamos a diario, es la que estudiaremos a continuación.

Fuerza de rozamiento

La fuerza de rozamiento o fricción aparece entre las superficies de dos cuerpos que están en contacto (y, como toda fuerza aparece de a pares, la misma fuerza está con sentidos opuestos en cada superficie). Su origen, a nivel microscópico, es la interacción electromagnética de los electrones en cada superficie. Su efecto, a nivel macroscópico, es una fuerza que siempre se opone al sentido del movimiento (si el cuerpo estuviera en movimiento) o al sentido que tendría el movimiento (si el cuerpo estuviera detenido).

Cuando alguno de los cuerpos en contacto está en movimiento, hablamos de fuerza de rozamiento dinámico, F_{rd}, y su valor, en módulo, resulta de la fuerza de contacto entre las dos superficies (fuerza normal) y un coeficiente que depende del material y rugosidad de las superficies en contacto. Se lo llama coeficiente de rozamiento dinámico, es una constante adimensional (no tiene unidades) y se nota μ_d.

$$F_{rd} = \mu_d N \qquad (8.1)$$

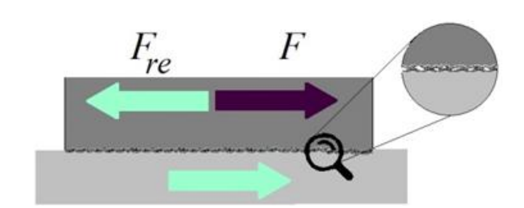
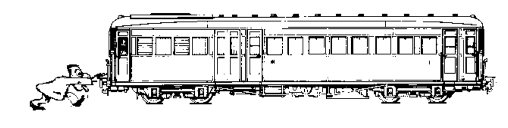


Figura 8.1: DLC para un cuerpo sometido a una fuerza *F* horizontal cuando no es despreciable el efecto del rozamiento.

La fuerza de rozamiento dinámico tiene siempre el mismo valor y no depende de cómo es el movimiento entre las superficies. Sin embargo, la fuerza de rozamiento no solo afecta a los objetos en movimiento. Muchas veces nos ha pasado al querer mover un cuerpo, empujamos con toda nuestra fuerza pero no conseguimos moverlo. Si sobre el objeto que estamos empujando aplicamos una fuerza horizontal (F_x) y no observamos una aceleración, es que hay alguna otra fuerza actuando de modo tal que la fuerza resultante sobre el objeto es cero: esa fuerza también es la *fuerza de rozamiento* pero en este caso, como no hay movimiento, hablaremos de rozamiento estático (F_{re}). Notar que en la figura 8.1 sólo se han marcado las fuerzas en la dirección horizontal.

No hay una fórmula para definir la fuerza de rozamiento estático: su valor será el mismo que la fuerza horizontal actuante en sentido opuesto. Es decir, el módulo de la F_{re} es lo "justo" para impedir el movimiento. Sin embargo, tiene un valor límite (F_{lim}), un valor máximo, pues el rozamiento no puede anular cualquier fuerza horizontal aplicada en sentido opuesto. Veamos esto con un ejemplo: si el hombre de la figura empujase al tren con una fuerza de 30 N, hacia la derecha, la fuerza de rozamiento estática será de 30 N, hacia la izquierda. Si el hombre se esfuerza mucho más y hace una fuerza de 70 N, la fuerza de rozamiento estática sería de 70 N. En ambos casos el tren permanece donde está.



¿Qué pasa si Superman en persona decide ayudar al pobre hombre que empuja al tren, haciendo una fuerza de 200000 N (2.10^5 N)? Bueno, ¡está claro que la fuerza de rozamiento estática no puede oponerse a cualquier cosa! Tiene un límite F_{lim} que recibe el nombre de **fuerza de rozamiento estático máxima** y se define como sigue:

$$F_{lim} = F_{re\,\text{máx}} = \mu_e N \qquad (8.2)$$

El coeficiente μ_e se llama coeficiente de rozamiento estático.

Como muchos habrán comprobado al empujar cosas pesadas, es más difícil empezar a mover algo que mantenerlo en movimiento, cuando ya conseguimos "arrancarlo". En dinámica eso se traduce en que

$$F_{re\,\text{máx}} > F_{rd}$$

por lo tanto,

$$\mu_e > \mu_d$$

Podemos graficar el módulo de la fuerza de rozamiento en función de la fuerza horizontal aplicada en sentido opuesto, como muestra la figura 8.2 y distinguiremos claramente la situación estática (donde la fuerza de rozamiento toma distintos valores) y la situación dinámica, donde la fuerza de rozamiento es constante. El límite entre ambas situaciones es la $F_{re\ máx}$. El gráfico muestra cómo al aumentar la fuerza F horizontal, la fuerza de rozamiento estática aumenta para impedir el movimiento (situación estática). Cuando la fuerza aplicada alcanza el valor de $F_{re\ máx}$, el cuerpo comienza a moverse y la fuerza de rozamiento estática se transforma en una fuerza de rozamiento dinámica.

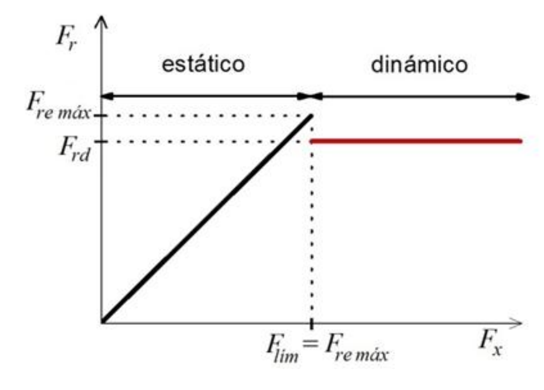


Figura 8.2: gráfico de fuerza de rozamiento en función de la fuerza horizontal aplicada.

Para resolver los problemas es útil recordar que no hay fórmula para la fuerza de rozamiento estática (salvo en el caso límite), pero si el problema es estático la velocidad del cuerpo es nula y se mantiene nula, o sea que su aceleración vale cero.

Cuando el problema es dinámico, la aceleración puede tomar cualquier valor, pero siempre vale que:

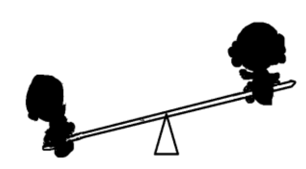
$$F_{rd} = \mu_d N.$$

Finalmente, si estamos justo en el límite entre las situaciones estáticas y dinámicas ("a punto de empezar a moverse"), podemos usar que la aceleración vale cero y la

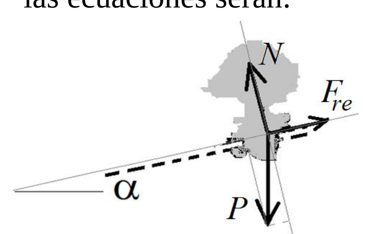
$$F_{re\ máx} = \mu_e N$$

Ejemplo

Santina, que pesa 360 N está sentada en un sube y baja, pero decide soltar las manos. Su hermano Mateo, que pesa 500 N, comienza a subirla. Mateo sabe física y sabe que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son de 0,5 y 0,3. ¿Cuál será el máximo ángulo que podrá tener el sube y baja hasta que Santina comience a deslizarse hacia abajo? ¿Qué pasaría si Mateo estuviese sentado en lugar de Santina, con ese mismo ángulo?



El diagrama de cuerpo libre será el de la figura. Hasta que Santina empiece a deslizarse (situación estática) las ecuaciones serán:



$$x: \quad P_x - F_{re} = 0 \qquad y: \quad N - P_y = 0 \qquad \text{ó}$$
$$x: mg\,\text{sen}(\alpha) - F_{re} = 0 \qquad y: \; N - mg\cos(\alpha) = 0$$

Cuando se esté deslizando serán:

$$x: \quad P_x - F_{rd} = ma \;\; ; \;\; y: \quad N - P_y = 0 \;\; \text{ó}$$
$$x: mg\,\text{sen}(\alpha) - \mu_d N = ma \;\; ; \;\; y: \; N - mg\cos(\alpha) = 0$$

Pero **justo en el límite** en que comienza a deslizarse (cuando nos pregunta el problema) serán:

$$x: \quad P_x - F_{re\ máx} = 0 \;\; ; \;\; y: \quad N - P_y = 0 \;\; \text{ó}$$
$$x: \; mg\,\text{sen}(\alpha) - \mu_e N = 0 \;\; ; \;\; y: \; N - mg\cos(\alpha) = 0$$

despejando N de la segunda ecuación y reemplazándola en la primera vemos que

$$mg\,\text{sen}(\alpha) - \mu_e mg\cos(\alpha) = 0$$

o sea:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = \mu_e$$
$$\alpha = \text{atan}(\mu_e)$$

Como puede verse, el resultado no depende de la masa de Santina, así si cambiase lugar con su hermano, él empezaría a deslizarse para el mismo ángulo de inclinación de 26,57°.

¿Cuánto sería el rozamiento si el ángulo fuese de 15°? ¿Y si fuese 30°?

Fuerza elástica

Todos hemos visto alguna vez un resorte y sabemos que, por la experiencia cotidiana, si yo trato de comprimir un resorte, éste tratará de estirarse y, por el contrario, si lo estiro tratará de encogerse. En cualquier caso, el resorte quiere volver a su posición original. Es decir, si yo no le hago nada, el resorte no hace nada; si yo lo empujo, él me empuja en sentido contrario. Cuanto más empujo yo, más empuja él. Esas situaciones son las que representamos en la figura 8.3.

Este es el primer ejemplo que encontramos de una fuerza que cambia con la posición: en el caso del resorte relajado, la fuerza vale cero; en el resorte comprimido apunta hacia la derecha y en el resorte estirado apunta hacia la izquierda. Además, como dijimos antes la fuerza dependerá de cuánto se estire (o comprima) el resorte.

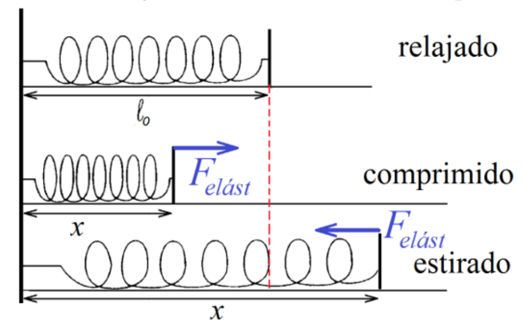


Figura 8.3: fuerza elástica en el extremo de un resorte.

Imaginemos que, como en la figura 8.3, un extremo del resorte está fijo a la pared. El largo del resorte cuando nada lo está afectando es lo que llamamos "longitud libre" y generalmente lo notamos como ℓ_0 o x_0. Cuanto más estiremos o comprimamos, más fuerza hará el resorte: la fuerza es proporcional a la elongación o compresión respecto de ℓ_0. La constante de proporcionalidad depende de las características del resorte, se llama constante elástica y se nota k. La constante elástica tiene unidades de N/m o Nm^{-1}.

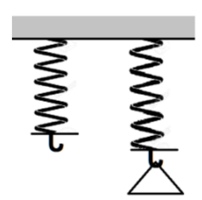
$$\vec{F}_{el} = -k(\vec{x} - \vec{l}_0) \qquad (8.3)$$

$[k]$= N m^{-1}

Notar que el "menos" indica que siempre es contraria a la elongación o compresión.

Ejemplo

Tengo un resorte colgado del techo. Su longitud es de 30 cm. En el extremo libre cuelgo un cuerpo (A) que pesa 5 N y el resorte se estira 1 cm. Saco el cuerpo A y lo reemplazo por un cuerpo B. La longitud del resorte entonces es de 33 cm. ¿Cuál es la masa del cuerpo B?



Como siempre empezamos dibujando el DCL (en este caso, solo aparecen dos fuerzas: el peso del cuerpo y la fuerza elástica) y escribiendo las ecuaciones que surgen de la 2da ley de Newton:

$$F_{el} - P = ma$$

F_{el} / P

Sabemos que, una vez que el resorte se ha estirado, permanece en reposo ($v = 0$ y $a = 0$). Además, conocemos la expresión para la fuerza elástica, entonces podemos escribir:

$$k\Delta x - P = 0$$

Es importante notar que el sentido de la fuerza elástica ya lo hemos incluido en el dibujo: sabemos que apunta hacia arriba, que en nuestro sistema es positivo.

El análisis que hemos hecho vale tanto para el cuerpo A como para el B. Para el caso del cuerpo B (la pregunta del problema) no conocemos la masa (ni el peso); aunque podemos calcular el estiramiento: $\Delta x_b = 33 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 3 \text{ cm} = 0{,}03 \text{ m}$, no podemos calcular la fuerza elástica porque ignoramos el valor de k.

Para el cuerpo A, en cambio, sabemos el valor del peso (5 N) y el estiramiento $\Delta x_a = 1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m}$); podemos calcular el valor de k:

$$k = \frac{P_a}{\Delta x_a} = \frac{5\text{N}}{0{,}01\text{m}} = 500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Conociendo ese dato, podemos obtener el peso de B y su masa:

$$k\Delta x_b - P_b = 0$$

$$500\frac{\text{N}}{\text{m}}0{,}03\text{m} - P_b = 0 \rightarrow\ P_b = 15\text{N}$$

$$m_b = 1{,}5\text{kg}$$

**** Con los conceptos explicados en esta clase pueden resolver los ejercicios 1 a 15 de la guía 4****

Guía de Problemas N°4: Dinámica: Rozamiento - Fuerzas elásticas

Problema 1: Un cajón de 50 kg está en reposo sobre una superficie plana. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cajón y la superficie es de 0,79, ¿qué fuerza horizontal se requiere para mover el cajón?

Problema 2: Al mover un escritorio de 35 kg de un lado al otro de un aula, un profesor encuentra que se necesita una fuerza horizontal de 275 N para poner el escritorio en movimiento y una fuerza de 195 N para conservarlo en movimiento con velocidad constante. Halle los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el escritorio y el piso del aula.

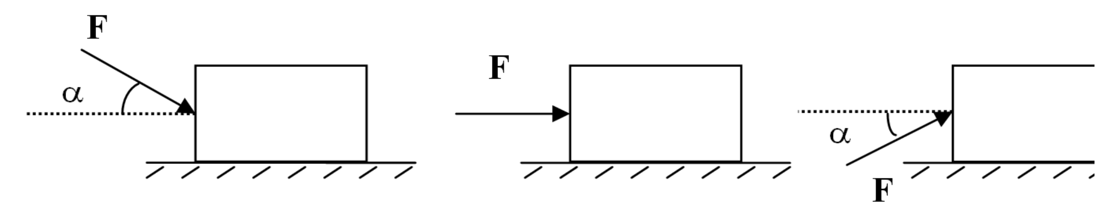
Problema 3: Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre un piso y un cajón de 25 kg es 0,68 y 0,34, respectivamente. Si se aplican horizontalmente fuerzas de: a) 150 N y b) 180 N, ¿cuál es la fuerza neta sobre el cajón aplicada en cada caso?

Problema 4: Un hombre arrastra por el suelo una canasta de 70 kg tirando de ella con una cuerda que está inclinada 15^o con la horizontal.

a) Si el coeficiente de rozamiento estático es de 0,50, ¿cuál debe ser la tensión necesaria en la cuerda para empezar a mover a la canasta?

b) Si el μ_d = 0,35. ¿Cuál es la aceleración inicial de la canasta?

Problema 5: En todos los casos mostrados en la figura el módulo de la fuerza ejercida para empujar un cajón es el mismo, F = 200 N, el ángulo α = 30º. La masa del cajón es m = 40 kg y el coeficiente de rozamiento dinámico entre el piso y el cajón es μ_d = 0,2. Determine el módulo de la aceleración en cada caso. ¿En cuál caso es mayor? Explique por qué el módulo de la aceleración es diferente en cada caso a pesar de que la fuerza **F** tiene el mismo módulo.

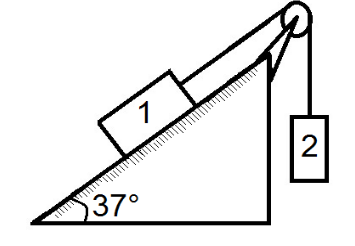


Problema 6: Para el sistema de la figura m_1 = 10 kg; μ_e = 0,5; μ_d = 0,2. Hallar:

a) El máximo valor que puede tomar la masa m_2 para que el sistema esté en equilibrio, justo antes de comenzar a deslizar hacia la derecha.

b) El mínimo valor que puede tomar la masa m_2 para que el sistema esté en equilibrio, justo antes de comenzar a deslizar hacia la izquierda.

c) Hallar valor de la fuerza de rozamiento si m_2 = 18 kg.

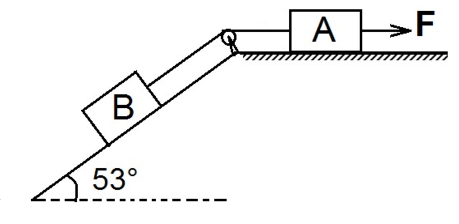


Problema 7: Dos bloques de 5 kg de masa cada uno están unidos por una cuerda como se muestra en la figura. Si existe rozamiento sólo entre la masa A y el plano horizontal, con coeficientes estático y dinámico de 0,40 y 0,20, respectivamente:

a) Calcule cuál debe ser el mínimo valor de la fuerza **F**, que debe realizarse sobre el bloque A en forma paralela al plano, para que el bloque B no caiga.

b) Si no existiese fuerza externa, diga con qué aceleración se moverá el sistema.

c) ¿Cuál es el valor de la tensión de la cuerda en este caso?

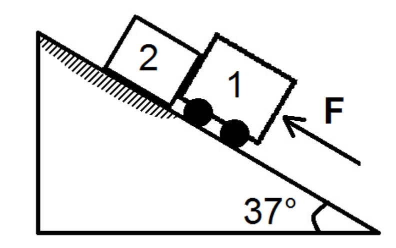


Problema 8: El sistema de la figura asciende por un plano inclinado por la acción de una fuerza cuyo módulo es F = 400 N con una aceleración desconocida. Las masas son m_1 = 20 kg y m_2 = 15 kg. Sólo hay rozamiento entre el bloque 2 y el plano, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico μ_d = 0,20.

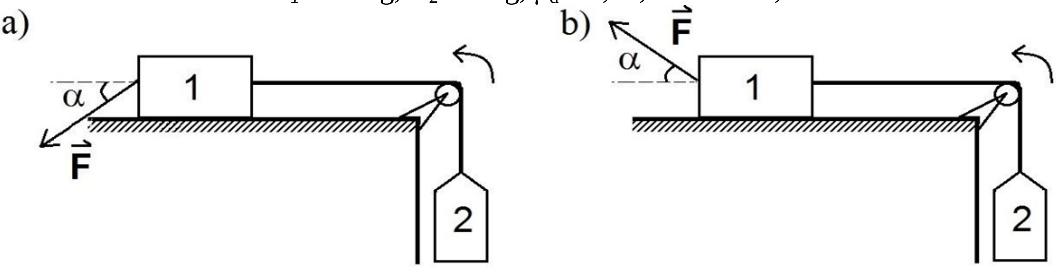
a) Haga un diagrama de cuerpo libre para cada bloque indicando claramente las fuerzas que actúan.

b) Calcule la aceleración del sistema.

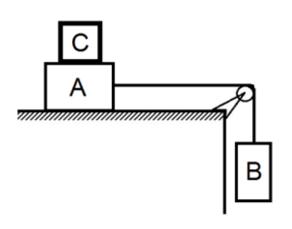
c) Calcule la fuerza de contacto entre ambos bloques.



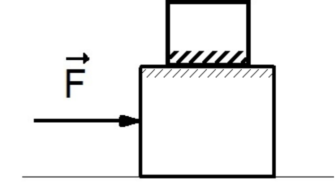
Problema 9: Para las dos situaciones planteadas en la figura, donde la intensidad de la fuerza F es la misma en ambos casos, determinar cuál de los sistemas adquiere mayor aceleración (¿o es la misma?) si inicialmente se mueven en el sentido indicado. Datos: m_1 = 10 kg, m_2 = 6 kg, μ_d = 0,25, F = 150 N, α = 37º.



Problema 10: En la figura, A es un bloque de 4,4 kg y B es otro de 2,2 kg.
a) Determine el peso mínimo del bloque C que debe ser colocado sobre A para impedirle que resbale si μ_e entre A y la mesa es de 0,20.
b) El bloque *C* se separa repentinamente del *A*, ¿cuál es la aceleración del bloque *A* si μ_d entre *A* y la mesa es de 0,15?



Problema 11: Un cuerpo de 4 kg se coloca encima de otro cuerpo de 5 kg. Para hacer que el cuerpo superior resbale sobre el inferior, que se mantiene fijo, se debe aplicar una fuerza horizontal de 12 N sobre el cuerpo superior. El conjunto de los dos cuerpos se coloca ahora en una mesa horizontal sin rozamiento. Determine:
a) la fuerza horizontal máxima (**F**) que puede aplicarse en el cuerpo inferior para que los dos cuerpos se muevan unidos;
b) la aceleración resultante de estos cuerpos.

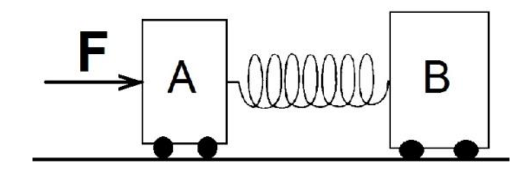


Problema 12: Un resorte relajado tiene 0,3 m de longitud. Uno de los extremos se fija a una pared y al otro se le aplica una fuerza de 50 N, produciendo un aumento de la longitud del resorte a 0,4 m. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

Problema 13: ¿Cuánto habrá que alargar un resorte para originar una aceleración inicial de 4,9 m/s^2 si la constante del resorte es de 200 N/m y el cuerpo unido al resorte tiene una masa de 4 kg?

Problema 14: Un resorte de masa despreciable, cuya longitud es de 40 cm cuando está descargado, tiene un extremo unido al techo a 2,4 m del piso, y en el otro extremo está colgado un cuerpo que pesa 120 N.
a) Hallar la constante elástica del resorte si al quedar en equilibrio su longitud es de 60 cm.
b) Si se eleva al cuerpo 5 cm desde su posición de equilibrio, ¿cuál es su aceleración al soltarlo?
c) ¿Cuánto habría que desplazar el cuerpo hacia abajo, respecto de la posición de equilibrio, para que al soltarlo partiera con una aceleración hacia arriba de módulo igual a *g*?

Problema 15: Los carritos *A* (de 4 kg) y *B* (de 3 kg) de la figura, permanecen en reposo sobre un riel horizontal, por el cual pueden moverse con rozamiento despreciable. Ambos están vinculados por un resorte de masa despreciable cuya constante elástica es de 300 N/m y su longitud en esas condiciones es de 0,3 m. En un instante dado, se aplica una fuerza *F* horizontal de 50 N sobre el carrito *A*.
a) Hallar la aceleración inicial de cada carrito.
b) Hallar la aceleración de cada carrito cuando la longitud del resorte es de 0,2 m.



Unidad III: Movimiento Circular y Fuerza Gravitatoria

9. Movimiento Circular

Al comenzar a estudiar cinemática hablamos de movimientos rectilíneos donde la trayectoria es una recta. Luego analizamos cinemática en dos dimensiones en el caso del tiro oblicuo. Ahora estudiaremos la cinemática del movimiento circular: cuando la trayectoria es una circunferencia. Las definiciones básicas siguen siendo las mismas: el vector velocidad es el cambio de la posición en el tiempo y es tangente a la trayectoria; el vector aceleración es el cambio de la velocidad en el tiempo.

Algunos ejemplos de cuerpos que realizan un movimiento circular son: un nene en una calesita; la punta de la aguja de un reloj; el engranaje de un motor; el disco duro de una computadora. Seguramente, ustedes podrán pensar varios ejemplos más… En el ejemplo de la figura 9.1 un auto recorre una pista circular. Se indica la trayectoria y el vector velocidad en dos instantes de tiempo. Puede verse que la velocidad (representada por un vector azul), cambia entre los dos momentos: en t_1 apunta hacia arriba y a la izquierda, mientras que en t_2 apunta hacia abajo y a la izquierda. Entonces podemos afirmar que hay aceleración (no nula). Esta es una característica importante y particular del movimiento circular: **siempre tiene aceleración**. Si la aceleración fuese cero, la velocidad no cambiaría, por lo tanto, no podría tener otra dirección ("dar vuelta").

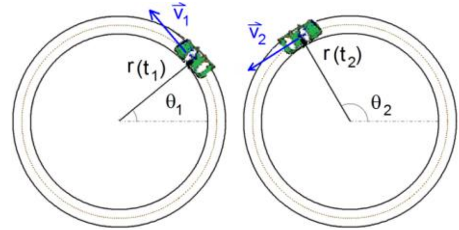


Figura 9.1: ejemplo de movimiento circular

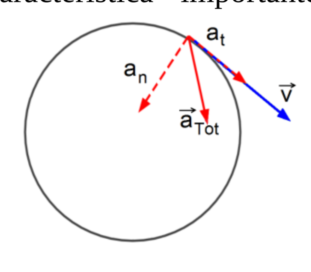


Figura 9.2: componentes del vector aceleración.

Podemos separar el efecto de la aceleración en dos partes (Fig. 9.2): una parte de la aceleración cambia la dirección del vector velocidad, pero deja igual el módulo (el largo del vector): es la **aceleración normal** (a_n). La otra componente, cambia el módulo de la velocidad, pero no su dirección: es la **aceleración tangencial** (a_t). En este curso estudiaremos movimientos circulares donde el módulo de la velocidad permanece constante. Es decir, la aceleración tangencial será cero y, por lo tanto, la aceleración total será igual a la aceleración normal. La aceleración normal no puede valer cero, si no el movimiento no sería circular.

Nos ocuparemos a continuación de la descripción del movimiento. Como el movimiento es en un plano, podría describirse dando las coordenadas (x,y) del vector posición en cada tiempo (como hicimos en tiro oblicuo). Sin embargo, si escribimos las coordenadas indicando la distancia al centro y el ángulo (Fig. 9.3), la descripción del movimiento es más sencilla porque el radio (r) siempre tendrá el mismo valor y, entonces, podremos describir el movimiento mirando solamente la variación del ángulo.

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$$

con $\quad x(t) = r\cos(\theta(t)) \qquad y(t) = r\,\mathrm{sen}(\theta(t))$

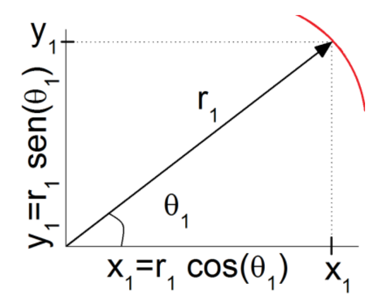


Figura 9.3: componentes del vector posición.

Para describir la posición de nuestro móvil nos alcanzará con conocer el radio de giro (r) y la variación del ángulo en el tiempo: $\theta(t)$. De forma análoga a la cinemática de trayectoria recta, definimos la velocidad angular como la variación del ángulo en el tiempo y la notamos con la letra griega omega minúscula (ω).

Recordemos que los ángulos serán medidos en radianes (una unidad adimensional): 180° (DEG) es equivalente a π radianes (RAD). La unidad de velocidad angular será 1/s. En los problemas que analizaremos en este curso, la variación del ángulo será uniforme y, por lo tanto, la velocidad angular será constante:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cte.} \qquad (9.1)$$

Una manera útil de evaluar "que tan rápido da vueltas" un móvil es medir el tiempo que tarda en dar una vuelta completa. Por ejemplo, la luna tarda 28 días en dar una vuelta a la tierra; el segundero tarda 60 segundos en dar una vuelta a la esfera del reloj. Este parámetro se llama **período**, tiene unidades de tiempo y se lo nota con la letra griega *tau* mayúscula (T).

Sin embargo, cuando queremos describir algunos objetos que giran muy rápidamente (como el electrón alrededor del núcleo atómico) el período es un número muy chico y resulta más práctico plantear la pregunta al revés. En lugar de decir "¿cuánto tarda en dar una vuelta?" (la respuesta sería el período), nos preguntamos "¿cuántas vueltas da en un segundo?". La magnitud que da cuenta de la cantidad de vueltas por unidad de tiempo recibe el nombre de **frecuencia**, se nota f y se mide en hertz (Hz), equivalente a 1/s. Alternativamente a la unidad Hz para medir frecuencia se puede usar la unidad rpm (o RPM): revoluciones por minuto. Es muy utilizada en mecánica para el funcionamiento de motores: 1 rpm $= \frac{1}{60}$Hz.

La información que aportan la frecuencia y el período es equivalente. Es fácil calcular uno teniendo el otro:

- El período del segundero de un reloj es 60 s: $\begin{array}{lcl} 60\text{ s} & \rightarrow & 1\ vuelta \\ 1\text{s} & \rightarrow & ? \end{array}$ $\quad ? = \frac{1}{60\text{ s}} = 0{,}017\,\frac{1}{\text{s}}$.

El período es 60 s y la frecuencia 0,017 Hz.

- La frecuencia de giro de un electrón es 10^{13} Hz: $\begin{array}{lcl} 10^{13}\ vueltas & \rightarrow & 1\text{ s} \\ 1\ vuelta & \rightarrow & ?? \end{array}$ $\quad ?? = \frac{1}{10^{13}\text{Hz}} = 10^{-13}\text{s}$.

La frecuencia es 10^{13} Hz y el período es 10^{-13} s.

En general: $$f = \frac{1}{T} \qquad (9.2)$$

Está claro que los conceptos de período y frecuencia están fuertemente ligados al de velocidad angular (ω) que mencionamos antes. Cuánto más velocidad angular tenga un móvil, menos tiempo tardará en dar una vuelta ó más vueltas dará por unidad de tiempo. Para relacionar estos parámetros debemos recordar que medimos los ángulos en radianes y, por lo tanto: 1 vuelta = 2 π.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ (9.3) ó $\omega = 2\pi f$ (9.4)

Hasta el momento hemos descripto el movimiento en cuanto al ángulo (o las vueltas), pero nunca dijimos cuanta distancia recorre el móvil. Para calcular eso, además del ángulo, debemos considerar la distancia al centro: el radio. Recordando geometría: una porción de la circunferencia se llama arco (y suele notarse con la letra s) y se relaciona con el ángulo y el radio de la siguiente manera: $s = r\theta$ (Fig. 9.4).

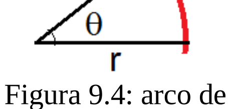


Figura 9.4: arco de una circunferencia.

Ya determinamos que en el movimiento circular el vector velocidad ($\vec{v}$) debe cambiar. Sin embargo, también dijimos que estudiaremos el caso en que este cambio sea sólo de dirección: el módulo de la velocidad (v) permanecerá constante. El módulo de la velocidad se relaciona con el cambio del ángulo (velocidad angular) y el radio de la siguiente manera:

$$v = \omega r \qquad (9.5)$$

las unidades de velocidad siguen siendo m/s (ó km/h).

Para poder determinar la aceleración en el movimiento circular, debemos mirar con atención el cambio del vector velocidad entre dos instantes que llamaremos t_1 y t_2. Es más sencillo comparar los vectores velocidad trasladándolos a un origen común, como se muestra en la figura 9.5. El vector de variación de velocidad ($\Delta\vec{v}$), apunta hacia el centro de la circunferencia. Eso indica la dirección y el sentido del vector aceleración.

El vector aceleración tiene la dirección del radio y apunta hacia el centro del círculo, por eso recibe el nombre de aceleración centrípeta.

Figura 9.5: posición ($\vec{r}$) y velocidad ($\vec{v}$) en t_1 y t_2.

Para calcular el módulo de esta aceleración, debemos considerar que estamos observando puntos muy próximos y por lo tanto Δθ es un ángulo muy pequeño. En esta aproximación, podemos decir que $\Delta v = v\Delta\theta$ (el módulo de la velocidad permanece constante: $v_1 = v_2 = v$). Dado que la aceleración es la variación de la velocidad en el tiempo:

$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t}$. Recordemos que $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$ y que $v = \omega r$. Entonces podemos decir:

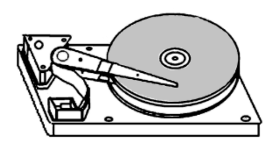
$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \qquad (9.6)$$

Ya habíamos dicho que la aceleración que experimenta un cuerpo es el resultado de una fuerza aplicada sobre él. La fuerza que da lugar a la aceleración centrípeta recibe el nombre de fuerza centrípeta (y generalmente la notamos F_c). Cuidado: no se trata de una fuerza particular o diferente a las que estudiamos

en dinámica. Cualquiera de las que mencionamos oportunamente (peso, fuerza normal, fuerza de rozamiento, etc.) puede "jugar el papel" de fuerza centrípeta si tiene la dirección radial y el sentido hacia el centro de la circunferencia.

$$F_c = ma_c \qquad (9.7)$$

Ejemplo 1



El disco rígido de una PC gira a 7200 rpm y tiene un radio de 4,75 cm. ¿Cuál es su frecuencia de giro en Hz?, ¿cuál es su período?, ¿cuál es su velocidad angular (ω)?, ¿cuál es la velocidad de un punto sobre el borde, en km/h?

El disco gira a 7200 rpm: es decir que da 7200 vueltas en un minuto (60 s). La frecuencia, medida en Hz, es decir cuántas vueltas dará en un segundo. Entonces: 60 s $\rightarrow$ 7200 $vueltas$ 1 s $\rightarrow f = \frac{7200}{60\ \text{s}}$

f = 120 Hz.

El período es el tiempo que tardará en dar una vuelta: 7200 $vueltas \rightarrow$ 60 s
1 $vuelta \rightarrow T$

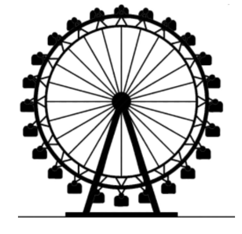
$T = \frac{60\ \text{s}}{7200} = 0{,}0083\ \text{s} = 8{,}3\ .\ 10^{-3} s = 8{,}3\ \text{ms}$

La velocidad angular se obtiene de la ecuación (9.3) o de la (9.4): $\omega = 2\pi f = 753{,}98\,\frac{1}{\text{s}}$

La velocidad, de la ecuación (9.5), $v = \omega\, r = 35{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 128{,}93\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Ejemplo 2



El London Eye es una vuelta al mundo que mide 120 m de diámetro. Javier, cuya masa es 70 kg, sube a dar una vuelta y comprueba que tarda media hora. ¿Cuál es la velocidad angular y la velocidad tangencial de Javier? ¿Cuál es la aceleración y la fuerza centrípeta que experimenta?

Sabemos que tarda media hora (1800 s) en dar una vuelta (2π). Su velocidad angular será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}0035\,\frac{1}{\text{s}} = 3{,}5\ .\ 10^{-3}\,\frac{1}{\text{s}}$

La velocidad tangencial depende del radio de giro; como el diámetro es 120 m, el radio es 60 m: $v = \omega r = 0{,}21\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

La aceleración centrípeta podemos obtenerla de $a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = 0{,}000735\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}35\ .\ 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

La fuerza centrípeta será $F_c = ma_c = 70\ \text{kg} * 7{,}35\ .\ 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}0515\ \text{N}$

****Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 1 a 7 de la guía 5****

10. Fuerza Gravitatoria

Al estudiar el movimiento de los cuerpos en caída libre, dijimos que todos los objetos en esa situación tienen una aceleración que llamamos gravedad, cuya dirección es vertical, su sentido hacia abajo y su módulo aproximadamente 10 m/s^2. Luego, cuando estudiamos la fuerza peso, dijimos que la fuerza responsable de esa aceleración era la interacción entre la masa del cuerpo y el planeta Tierra. El módulo de la fuerza peso se calcula multiplicando la masa del cuerpo por aceleración de la gravedad. Si estamos en la tierra, usamos g = 10 m/s^2. Si nos encontrásemos en otro planeta, deberíamos multiplicar la masa por la gravedad en ese planeta. Hasta ahora, sin embargo, no ahondamos demasiado en el origen de esta fuerza; es lo que haremos en esta unidad.

Muchos científicos se dedicaron a estudiar la caída libre de los cuerpos y Galileo fue quien postuló la mayoría de los conceptos actuales. Por otra parte, muchos astrónomos estudiaron el movimiento de los cuerpos celestes y Kepler presentó las tres leyes que describen el movimiento planetario. Pero, a fines del siglo XVII, fue Isaac Newton quien estableció la ***Ley de Gravitación Universal*** mostrando que el movimiento en caída libre y el movimiento planetario son manifestaciones de la misma fuerza: la fuerza gravitatoria. Dos cuerpos con masa sienten una fuerza atractiva que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Además, la fuerza es en la dirección de la recta que une los dos cuerpos: es un ejemplo de lo que llamamos fuerza central. Podemos escribirla en forma vectorial como sigue:

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} \qquad (10.1)$$

La llamamos F_{12} queriendo remarcar que es la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 (es decir que, al dibujarla, la tendremos que poner en el cuerpo 2). Por supuesto, como dice el principio de acción y reacción, el cuerpo 1 sentirá una fuerza igual en módulo y dirección, opuesta en sentido, que llamamos F_{21} en la figura 10.1. La distancia entre ambos cuerpos (medida desde el centro de cada uno de ellos) es la llamada r_{12}. La constante de proporcionalidad recibe el nombre de constante de gravitación universal y se nota con la letra G. La dirección de la fuerza es la de la recta que une ambos cuerpos y la llamamos $\hat{r}_{12}$ (es el versor 1-2: un vector de módulo uno, cuyo origen está en el cuerpo 1 y su dirección apunta hacia el cuerpo 2). Por último, el signo negativo indica que el sentido de la fuerza es atractivo; es decir, "empuja" a 2 hacia 1 y a 1 hacia 2.

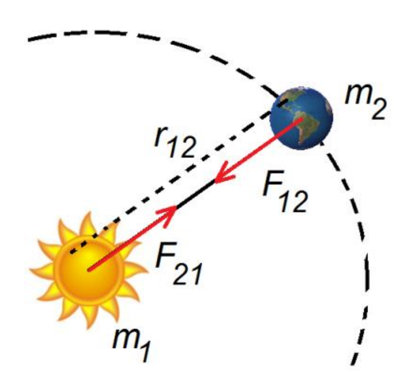


Figura 10.1: fuerza gravitatoria (par acción-reacción).

La constante de gravitación universal fue medida por primera vez por Henry Cavendish en 1798 y vale:

$$G = 6{,}67\ 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

La fuerza gravitatoria no solo afecta a los cuerpos celestes, sino a todo objeto que tenga masa. Sin embargo, por ser la constante de gravitación un número tan pequeño, la fuerza sólo adquiere valores apreciables cuando la masa es grande.

<u>*Ejemplo*</u>

Luis, cuya masa es de 85 kg, está sentado en el colectivo al lado de Felisa, cuya masa es de 60 kg. Si la distancia entre ellos es medio metro ¿Cuánto vale la fuerza de atracción gravitatoria entre ambos?

$$F = 6{,}67\ 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{85\ \mathrm{kg}\ 60\ \mathrm{kg}}{(0{,}5\ \mathrm{m})^2} = 1{,}36\ 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

Es decir, un poco más de un micro-newton; algo así como una décima del peso de un mosquito. En cambio, calculemos la fuerza de atracción entre Felisa y el planeta tierra: la masa de la tierra es 5,98 10^{24} kg. La distancia que los separa (desde el centro de la tierra, al centro de Felisa), es el radio de la Tierra: 6360 km (este es el radio medio, considerando a la tierra como una esfera perfecta, lo que es una aproximación muy buena):

$$F = 6{,}67\ 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{5{,}98\ 10^{24}\mathrm{kg}\ \ 60\mathrm{kg}}{(6{,}36\ 10^{6}\mathrm{m})^2} = 592\ \mathrm{N}$$

Ese es el peso de Felisa. Efectivamente, la fuerza peso es la interacción gravitatoria entre un objeto y el planeta:

$$P = G\frac{m\,m_P}{{R_P}^2}$$

donde m_P es la masa del planeta y R_P su radio. Además, sabíamos que el peso podía calcularse como masa*gravedad. O sea, podemos calcular el valor de la gravedad, utilizando la interacción gravitatoria:

$$P = G\frac{mm_P}{{R_P}^2} = mg$$

$$g = G\frac{m_P}{{R_P}^2}$$

La gravedad en la superficie de la tierra es:

$$g = 6{,}67\ 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\frac{5{,}98\ 10^{24}\text{kg}}{(6{,}36\ 10^6\text{m})^2} = 9{,}86\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Por supuesto, si nos vamos a otro planeta la gravedad será distinta y el peso, por lo tanto, también.

* ¿Cuánto pesan cien kilos de plomo en la superficie de Júpiter, cuya masa es $1{,}9\ 10^{27}$ kg y cuyo radio medio es 70000 km? *Rta: Pesan 2586 N.

Comparaciones

Muchas de las magnitudes que usamos al describir cuerpos celestes y sus movimientos están muy alejadas de los números que usamos habitualmente. Por eso, en muchos casos, es útil hacer comparaciones.

Por ejemplo (todos los valores son aproximados):

el radio de la luna es 1740 km: el 30% del radio terrestre ($R_{luna} = 0{,}3\ R_{Tierra}$).

el sol tiene un radio de 695800 km: 110 veces el radio de la tierra ($R_{sol} = 110\ R_{Tierra}$).

la distancia de la tierra a la luna es 384400 km. O sea 60 veces el radio terrestre

Por otra parte, conocer la relación de algunas magnitudes nos permite deducir relaciones nuevas. Por ejemplo, si el radio de la luna es el 30% del radio terrestre, la superficie lunar es el 9% de la superficie terrestre; porque la superficie es proporcional al cuadrado del radio:

$$S \propto R^2$$

$$R_{luna}^2 = (0{,}3\ R_{tierra})^2 = 0{,}09R_{tierra}^2$$

$$S_{luna} = 0{,}09S_{tierra}$$

* Si el radio lunar es el 30% del radio terrestre y la masa de la luna es 1,4% de la de la tierra ¿Cómo es la relación entre la gravedad lunar y la terrestre? Rta: $g_{luna} \sim 16\%\ g_{tierra}$.

Ejemplo



Marcela decide escalar el Aconcagua, pero está preocupada por el peso de su mochila. Se consuela pensando que cuando llegue a la cima del pico más alto de América (6960,8 msnm), su mochila pesará menos. ¿Cuánto cambia el peso de la mochila de Marcela en la cima del Aconcagua?

Para calcular el peso de la mochila a nivel del mar (P_0), la cuenta que tenemos que hacer es: $P_0 = G\frac{m_M m_T}{{R_T}^2}$, donde m_M es la masa de la mochila, m_T es la masa de la tierra y R_T es el radio de la tierra.

Cuando Marcela sube con su mochila al Aconcagua, cuya altura llamaremos h, para calcular el nuevo peso (P_{Ac}) la diferencia es que la distancia ahora vale R_T+h: $P_{Ac} = G\frac{m_M m_T}{(R_T+h)^2}$

No sabemos la masa de la mochila, pero como lo que nos interesa es saber cuánto cambió el peso, lo que hacemos es dividir (para comparar). Simplificando, nos queda esta relación:

$$\frac{P_0}{P_{Ac}} = \frac{(R_T+h)^2}{{R_T}^2} = (1+\frac{h}{R_t})^2$$

conociendo el radio de la tierra y la altura del Aconcagua, podemos calcular $\frac{P_0}{P_{Ac}} = 1{,}0022$ o, lo que es lo mismo, $P_{Ac} = 0{,}9978P_0$. La mochila perdió un 0,2% de su peso a nivel del mar.

Como lo que buscamos era una comparación, lo que nos importa es cuanto cambió la distancia: ni la masa (de la mochila, ni de la tierra) son datos necesarios porque no cambian.

Fuerza gravitatoria y movimiento circular

Habíamos mencionado al hablar de fuerzas centrípetas, que muchas de las fuerzas estudiadas (normal, rozamiento, tensión, etc.) pueden jugar el rol de fuerza centrípeta. En el caso del movimiento de cuerpos celestes (donde la aproximación de movimiento circular es bastante buena), la fuerza gravitatoria desempeña el papel de fuerza centrípeta. La fuerza gravitatoria tiene la dirección de la recta que une los dos cuerpos que interactúan: es un ejemplo de lo que llamamos fuerza central.

Si la fuerza gravitatoria hace el papel de fuerza centrípeta, podemos escribir:

$$F_{grav} = F_c \qquad \text{ó} \qquad G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = m_1 a_c$$

la distancia entre los cuerpos (r_{12}) será el radio de giro.

Dijimos que la fuerza gravitatoria aparece sobre dos cuerpos, pensando en un movimiento circular, podríamos pensar "¿cuál de los dos está girando?". En realidad, para responder eso, sólo nos interesa saber dónde estamos parados. El cuerpo que elegimos como "centro" en nuestra descripción permanece quieto (siempre con v = 0) y por lo tanto su aceleración es nula.

Ejemplo 1

¿Cuál es la masa del sol, si sabemos que el radio medio de la órbita de la tierra es 1,5 10^8 km y un año tiene 365,3 días?

Como dijimos antes, lo central es recordar que $F_{grav} = F_c$. Entonces podemos escribir:

$$G\,\frac{m_{sol} m_{tierra}}{r^2} = m_{tierra} a_c$$

vemos que la masa de la tierra se simplifica. Recordando las definiciones y relaciones entre aceleración centrípeta, velocidad, frecuencia y período, podemos decir:

$$G\,\frac{m_{sol}}{r^2} = \omega^2 r = (\frac{2\pi}{T})^2 r$$

$$m_{sol} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$$

$$m_{sol} = 2\ 10^{30}\ \text{kg}$$

Es importante recordar, al hacer las cuentas, que las distancias las medimos en metros y el tiempo en segundos. También es útil recordar las propiedades de la potencia (para no hacer cuentas de más) y revisar el manual de la calculadora.

Por ejemplo: $r^3 = (1{,}5\ 10^8\ \text{km})^3 = (1{,}5\ 10^{11}\ \text{m})^3 = 1{,}5\ ^3 10^{33}\ \text{m}^3$

$$T^2 = (365{,}3\ \text{dias})^2 = 9{,}9615\ 10^{14} \text{s}^2$$

Ejemplo 2

Un planeta tiene cuatro veces la masa de la tierra y un único satélite que orbita a su alrededor. Si el radio de la órbita de ese satélite es el mismo que el de nuestra luna, ¿Cuál es su período giro?

Veamos el planteo de la tierra y la luna

$$G\,\frac{m_{luna} m_{tierra}}{r_{tierra-luna}^2} = m_{luna} a_c \qquad \rightarrow \qquad G\,\frac{m_{tierra}}{r_{tierra-luna}^2} = (\frac{2\pi}{T_{luna}})^2 r_{tierra-luna}$$

de donde podemos despejar $T_{luna} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{tierra-luna}^3}{G\ m_{tierra}}}$

Obviamente, si en lugar de "tierra" y "luna" ponemos "planeta" y "satélite" obtendremos la misma relación. En este problema en particular, donde el radio de la órbita es el mismo en ambos casos, la única diferencia es $m_{planeta} = 4 m_{tierra}$. Entonces, nos quedará

$$T_{satélite} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{tierra-luna}^3}{G\ 4 m_{tierra}}} \qquad \rightarrow \qquad T_{satélite} = \frac{1}{2} T_{luna}$$

Tenemos que recordar que la luna tarda aproximadamente 28 días en dar una vuelta a la tierra, entonces el período de este satélite del que nos habla el problema será de 14 días.

****Con los conceptos explicados en esta clase se pueden resolver los ejercicios 8 a 17 de la guía 5****

Guía de Problemas N° 5: Movimiento circular uniforme. Fuerza gravitatoria

Problema 1: Un disco de 20 cm de radio gira a 33,33 rpm.
a) Hallar su velocidad angular, la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta en un punto del borde.
b) Repetir los cálculos para otro punto situado a 10 cm del centro.
c) ¿Cuánto tiempo tardará el disco en girar 780º? ¿Y en efectuar 20 revoluciones?

Problema 2: Las ruedas de un automóvil tienen 60 cm de diámetro. Calcular con qué velocidad angular giran las ruedas cuando el automóvil marcha a 72 km/h en un camino rectilíneo, sin que resbalen.

Problema 3: Un automóvil, cuyo velocímetro indica en todo instante 72 km/h, recorre el perímetro de una pista circular en un minuto. Determinar el radio de la misma.
Si el automóvil tiene aceleración en algún instante, determinar su módulo, dirección y sentido.

Problema 4: Un móvil recorre una circunferencia de 50 cm de radio con una frecuencia *f* de 10 Hz. Determinar: a) el período, b) la velocidad angular, c) su velocidad tangencial, y d) su aceleración.

Problema 5: Un pequeño bloque de 1 kg de masa está atado a una cuerda de 0,6 m, y gira, describiendo una circunferencia vertical, a una frecuencia de 60 r.p.m. que podemos considerar constante. Calcular
a) la tensión de la cuerda cuando el bloque se encuentra en el punto más alto de su trayectoria.
b) la tensión de la cuerda cuando el bloque se encuentra en el más bajo de su trayectoria.
¿Por qué en necesario decir que la frecuencia *podemos considerarla* constante? ¿Cuál es la dirección del vector aceleración en un punto cualquiera de la trayectoria? ¿Es posible este movimiento circular uniforme en la vida real?

Problema 6: ¿Cuál es la aceleración y la fuerza centrípeta que experimenta un chico que pesa 500 N y que viaja en el borde de una calesita de 2 m de radio y que da una vuelta cada 8 s? ¿Con qué tipo de fuerza ya estudiada se corresponde la fuerza centrípeta calculada?

Problema 7: Analice cada una de las siguientes afirmaciones y diga cuáles son verdaderas y cuáles no.
a) En un movimiento circular uniforme, la aceleración es nula.
b) Todos los cuerpos en que se muevan con movimiento circular uniforme de igual frecuencia, tendrán la misma velocidad tangencial.
c) Un cuerpo atado a un piolín que se hace girar en un plano horizontal, puede estar animado de un movimiento circular uniforme.
d) Al cortarse el piolín del caso anterior el cuerpo sale despedido en la dirección del radio.

Problema 8: Un satélite artificial, cuya masa es 100 kg, gira alrededor de la Tierra, dando una vuelta completa cada 90 minutos. Suponiendo que su órbita es circular, que el radio medio de la Tierra es 6360 km, y que la altura media del satélite sobre la superficie terrestre es de 280 km, determinar su velocidad tangencial, su aceleración y la fuerza gravitatoria a la que lo somete la Tierra.

Problema 9: Hallar cuánto pesa un meteorito de 2 kg en el campo gravitatorio de la superficie del planeta Marte. Hallar cuánto pesa Marte en el campo gravitatorio del meteorito, en la misma posición anterior. Datos: constante universal de gravitación G = $6,67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2; masa de Marte = $6,6 \times 10^{23}$ kg; radio marciano = 3380 km.

Problema 10: Sabiendo que la masa de la Luna es de $7,38 \times 10^{22}$ kg y el radio lunar es de 1700 km, determinar la aceleración de la gravedad en la superficie de nuestro satélite. La escalerilla del módulo lunar fue diseñada para resistir una carga máxima de 400 N, ¿podrá utilizarla confiadamente un astronauta que pesó 1200 N (con su equipo) aquí en la Tierra?

Problema 11: Hallar a qué altura sobre la superficie terrestre la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad de la que existe a nivel del mar. ¿A qué altura se hace cero? Radio terrestre = 6360 km.

Problema 12: La Tierra, cuya masa es $5,98 \times 10^{24}$ kg, gira alrededor del Sol en una órbita que se puede suponer circular a una velocidad tangencial de 29,78 km/s dando una vuelta completa en 365,3 días. Dato: G = $6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2/kg^2.
a) ¿Cuál es radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol?
b) ¿Cuál es la intensidad de la fuerza gravitatoria que mantiene a la Tierra girando alrededor del Sol?
c) ¿Cuál es la masa del Sol?

Problema 13: En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, en electrón gira alrededor del protón en una órbita circular de $0,53 \times 10^{-10}$ m de radio con una rapidez de $2,18 \times 10^{6}$ m/s.
a) ¿Cuál es la aceleración del electrón en el átomo de hidrógeno?
b) ¿Cuál es la fuerza centrípeta que actúa sobre él? Dato: $m_{e-} = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

Problema 14: Analice cada una de las siguientes afirmaciones y diga cuáles son verdaderas y cuáles no.
a) La fuerza peso es el resultado de la interacción gravitatoria.
b) La fuerza gravitatoria puede actuar como fuerza centrípeta.
c) Si Ud. pesa 600 N eso indica que Ud. atrae a la Tierra con una fuerza de 600 N.

Problema 15: Calcule a) la velocidad angular; b) la velocidad tangencial y c) la aceleración centrípeta de la Luna, sabiendo que ésta efectúa una revolución completa en 28 días y que la distancia media a la Tierra es de $3{,}8 \times 10^8$ m.

Problema 16: Sobre la superficie de un planeta de radio R = 3000 km la aceleración de la gravedad es de $0{,}2\ m/s^2$. Sabiendo que la constante de gravitación universal es $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$,
a) determinar la fuerza gravitatoria que experimenta un objeto de 10 kg sobre la superficie de dicho planeta;
b) determinar la masa del planeta;
c) si se pone un satélite en órbita alrededor del planeta, de modo tal que el período de revolución es de 20 horas, determinar a qué altura sobre la superficie se encuentra el satélite.

Problema 17: ¿Cuánto duraría un año en la tierra si la masa del sol fuera la mitad?

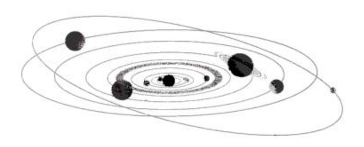
Unidad IV: Trabajo y Energía. Ley de conservación de la Energía Mecánica

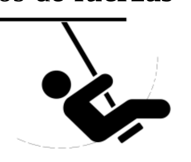
11. Trabajo y Energía Cinética

En el capítulo de Dinámica estudiamos que las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo modifican su estado de movimiento: cambia el vector velocidad del cuerpo (adquiere aceleración). Esto se expresa en la 2^{da} ley de Newton así:

$$\vec{F}_R = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i \;=\; m\,\vec{a} \;\;= m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Esta expresión nos permite calcular la aceleración conociendo las fuerzas aplicadas y la masa del cuerpo. En cinemática vimos que conociendo la aceleración podemos calcular cómo cambian la velocidad y la posición. En este curso solo estudiamos casos con aceleración constante en el tiempo; es decir, las **fuerzas aplicadas son constantes**. Pero en la naturaleza nos encontramos con ejemplos de **fuerzas que no son constantes:** varían con el tiempo (ej. la fuerza con que el viento empuja una hoja), o que varían con la posición o la velocidad que, a su vez, cambian con el tiempo (ej. la fuerza elástica depende de la posición y la fuerza viscosa, con la que un fluido frena el movimiento, depende de la velocidad). ¿Pueden sugerir otros ejemplos?





Para poder analizar casos donde las fuerzas no son necesariamente constantes, plantearemos un enfoque diferente: vamos a estudiar nuevas magnitudes que nos permitirán resolver el problema conociendo solamente el estado de posición y velocidad inicial y final del sistema.

En esta unidad, vamos a estudiar el **trabajo** y la **energía.** Ambos son términos que conocemos y utilizamos, sino en la ciencia, en la vida cotidiana. Habitualmente pensamos al **trabajo** como "hacer un esfuerzo" o "realizar una actividad": son cosas que nos cansan. Por otro lado, la energía está presente en el combustible, la electricidad, la calefacción; los alimentos que comemos nos proveen de la energía que necesitan nuestros organismos para vivir, para realizar esfuerzos. Aunque estas ideas no definen el trabajo y la energía desde el punto de vista científico, veremos que están relacionados. En este capítulo vamos a definir el trabajo realizado por una fuerza constante, el trabajo realizado por una fuerza variable, la energía cinética, la energía potencial, la energía mecánica y la potencia.

Trabajo de una fuerza constante

Empezaremos mostrando cómo se calcula el trabajo realizado por una fuerza constante. Recordemos que una fuerza es constante, cuando no cambia (ni en módulo, ni en dirección). El trabajo realizado por una fuerza constante al mover un cuerpo se calcula como el producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\Delta\vec{x}$:

$$T_F = \vec{F}.\Delta\vec{x} = F\,\Delta x\cos(\theta) \qquad (11.1)$$

F es el módulo de la fuerza aplicada al cuerpo, Δx es el módulo del desplazamiento del cuerpo y θ es el ángulo formado por las direcciones de la fuerza y del desplazamiento. Como la función coseno puede tomar valores en el intervalo [-1; 1], es fácil notar que el trabajo de una fuerza puede ser positivo, negativo o cero. Por ejemplo, para las situaciones presentadas en la figura 11.1, las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_5$ hacen trabajo positivo, las fuerzas $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$ hacen trabajo negativo y el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}_2$ es cero.

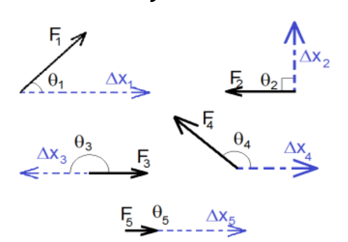
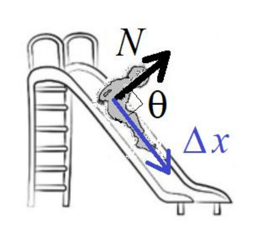


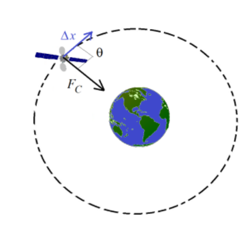
Figura 11.1: **F** y Δ***x*** formando diferentes ángulos.

Vale la pena resaltar que siempre que una fuerza actúa en dirección perpendicular al desplazamiento (el ángulo θ = 90º, cos (90º) =0), el trabajo realizado por esa fuerza es cero, $T_F = 0$. Veamos algunos casos:



- El trabajo de la fuerza normal sobre un cuerpo es cero, $T_N = 0$.
- En un movimiento circular uniforme, un cuerpo se mueve debido a la acción de la fuerza centrípeta F_c que es perpendicular a la trayectoria del cuerpo, por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza centrípeta es cero, $T_{Fc} = 0$. Por ejemplo, el trabajo de la fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae a un satélite que se mueve en una órbita circular a su alrededor.





El trabajo es una magnitud escalar. Como $T_F = \vec{F}\,\Delta\vec{x}$, la fuerza está dada en newtons y el desplazamiento está dado en metros, el trabajo tiene como unidad en el sistema MKS, el *joule* o *julio* (J)[3], que se define como la cantidad de trabajo realizado por una fuerza constante de un newton en un metro de longitud en la misma dirección de la fuerza.

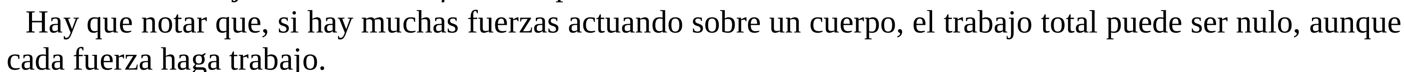
$$[T] = \mathrm{J} = \mathrm{N\ m} = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}$$

Trabajo de un sistema de fuerzas. Principio de superposición

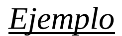
Cuando hay más de una fuerza actuando sobre un cuerpo, es equivalente calcular el trabajo de cada una de las fuerzas y sumarlos, que sumar las fuerzas (es decir, obtener la fuerza resultante, $\vec{F}_R = \sum_i^N \vec{F}_i$), y luego calcular su trabajo:

$$T_{F_R} = \overrightarrow{F_R}\,\Delta\vec{x} = (\textstyle\sum_i^N \vec{F}_i)\Delta\vec{x} = (\sum_i^N \vec{F}_i\,\Delta\vec{x}) = \sum_i^N T_{F_i} \qquad (11.2)$$

Esta ecuación expresa el denominado **principio de superposición**: "*El trabajo de la fuerza resultante de varias fuerzas aplicadas a un cuerpo es igual a la suma de los trabajos de todas las fuerzas aplicadas*".

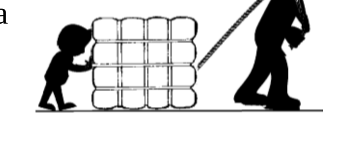


Hay que notar que, si hay muchas fuerzas actuando sobre un cuerpo, el trabajo total puede ser nulo, aunque cada fuerza haga trabajo.



Ejemplo

Leo y su papá deben mover un paquete de 900 N a través de un pasillo de 4 m. Leo hace una fuerza horizontal de 90 N y el papá hace una fuerza de 300 N con una inclinación de 60°. El rozamiento es despreciable. ¿Cuál es el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el paquete?



$T_{Fleo} = 90\ \mathrm{N}\ 4\ \mathrm{m}\cos(0°) = 360\ \mathrm{J}$ $\qquad$ $T_{Fpapá} = 300\ \mathrm{N}\ 4\ \mathrm{m}\cos(60°) = 600\ \mathrm{J}$

$T_{peso} = 900\ \mathrm{N}\ 4\ \mathrm{m}\cos(90°) = 0$ $\qquad$ $T_{Normal} = F_{Normal}\ 4\ \mathrm{m}\cos(90°) = 0$

¿Qué trabajo se debe realizar para llevar una pelota de tenis (masa: 60 g) desde el piso a una mesa de 75 cm de altura con velocidad constante? Rta: 0,45 J.

Trabajo de una fuerza variable

La definición del trabajo de una fuerza dada por la ecuación (11.1) es válida para el caso de fuerzas constantes. Si la fuerza aplicada NO es constante, es decir, F_x toma un valor distinto que depende de la posición x, como se puede ver en la figura 11.2, el cálculo de trabajo se define como una integral:

$$T = \int_{x_0}^{x} \vec{F}.d\vec{x} = \int_{x_0}^{x} F\cos(\theta)dx \qquad (11.3)$$

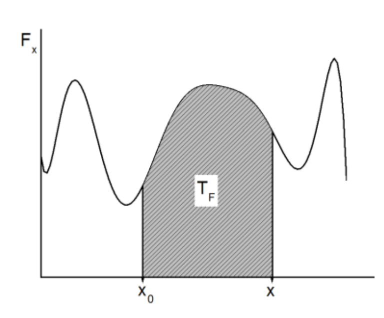


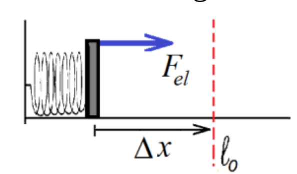
Figura 11.2: El área bajo la curva de F vs x es el trabajo realizado por F al desplazarse de x_0 a x.

Gráficamente, puede interpretarse como el área encerrada bajo la curva de fuerza (la componente en la dirección del desplazamiento) en función del desplazamiento si la función es positiva (Fig. 11.2). Cuando el gráfico de F queda debajo del eje, el trabajo será negativo.

Como ejemplo de una fuerza que depende de la posición, hemos estudiado la fuerza elástica:

$$\vec{F}_{el} = -k(\vec{x} - \vec{\ell}_0)$$

Imaginemos un resorte comprimido como en la figura: el resorte tratará de volver a su longitud libre (ℓ_0), empujando la caja hacia la derecha); cuanto más se "descomprima", menos fuerza hará. El ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es $\theta = 0$. El gráfico del módulo de la fuerza elástica es una recta como se ve en la Fig. 11.3.



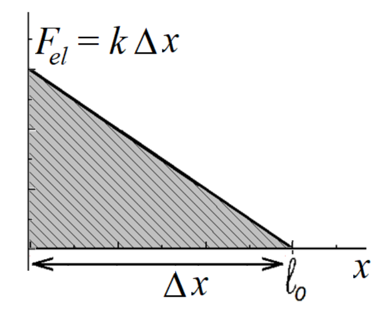


Figura 11.3: fuerza elástica de un resorte comprimido hasta su longitud libre.



[3] En honor al físico inglés James P. Joule (1818 - 1889).

El área bajo la curva puede calcularse como el área de un triángulo:

$$T_{Fel} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

El 'efecto' del Trabajo: la Energía Cinética

Consideremos un cuerpo de masa m que se está moviendo y al que le aplicamos una fuerza F (constante) durante un tiempo (Δt). Como le aplicamos una fuerza, el cuerpo tendrá una aceleración (en la misma dirección y sentido que la fuerza) y se moverá con MRUV, desplazándose un intervalo Δx.

Las ecuaciones horarias de la posición y de la velocidad que estudiamos en cinemática para el MRUV, son:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \tfrac{1}{2} a \Delta t^2 \qquad\qquad v - v_0 = a \Delta t$$

Despejando la aceleración de la segunda ecuación: $a = \frac{(v - v_0)}{\Delta t}$ y reemplazando en la primera, Δx resulta:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{(v - v_0)}{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{1}{2} (v_0 + v) \Delta t$$

Como la fuerza resultante F es paralela al desplazamiento Δx, ($\theta = 0$), la ecuación (11.1) se escribe:

$$T_F = F\, \Delta x.$$

Recordando que por la 2da ley de Newton $F = ma$, y la expresión para Δx que hallamos:

$$T_F = F\, \Delta x = ma\, \Delta x = m \frac{(v - v_0)}{\Delta t} \frac{1}{2} (v_0 + v) \Delta t = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

Es notable que, aunque usamos cinemática (posición y velocidad en función del tiempo), en la última expresión el intervalo de tiempo Δt no aparece. Es decir, el trabajo de la fuerza equivale a la diferencia de dos cantidades que dependen de la masa y la velocidad del cuerpo en los momentos inicial y final:

$$T_F = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 \qquad (11.4)$$

Definimos la **energía cinética** de un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{v}$, como:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad (11.5)$$

Es importante destacar que, aunque la velocidad es un vector ($\vec{v}$), la energía cinética depende de la velocidad al cuadrado (v^2) y, por lo tanto, es una magnitud física **escalar**: no importa "hacia donde" se mueva un cuerpo (dirección y sentido), su energía cinética dependerá solamente del módulo de su velocidad y de su masa. Observando la definición dada por la ecuación 11.4, podemos afirmar que siempre la $E_c \geq 0$; no puede ser negativa y es nula si el cuerpo no tiene masa o si su velocidad es cero. La unidad en que se mide la energía en el sistema MKS, es igual a la unidad en que se mide el trabajo, el joule. También se pueden utilizar unidades alternativas: ergios o electrón-volt o calorías.

Podemos re-escribir el resultado de la ec. (11.3):

$$T_F = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = E_c - E_c^0 = \Delta E_C$$

La expresión ΔE_C se lee "**variación** de energía cinética". En general, cuando nos interese saber cómo evoluciona un sistema, tendremos que estudiar cómo **varía** su energía. Por ejemplo, al comparar la energía cinética entre dos puntos A y B, analizaremos la diferencia:

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2$$

Hay que tener en cuenta que, aunque la energía cinética es siempre no negativa, la **variación de energía cinética** puede ser positiva, negativa o nula. Un sistema puede **ganar** energía cinética (tiene al final más energía cinética que al principio: $\Delta E_C > 0$), puede **perder** energía cinética (tiene al final menos energía de la que tenía al principio: $\Delta E_C < 0$) o puede **conservar** su energía cinética (tiene la misma energía al final que al principio: $\Delta E_C = 0$)

** Un proyectil de 8 g es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 360 m/s. ¿Cuál es su energía cinética en el momento del disparo? ¿Cuál será al llegar a la altura máxima? ¿Cuánto es la variación?
Rta: 518,4 J al salir y cero en la altura máxima. La variación es –518,4 J: perdió energía cinética.

Teorema del trabajo y la energía cinética

La ecuación (11.2) también puede escribirse así:

$$T_{F_R} = \overrightarrow{F_R}\,\Delta\vec{x} = E_c - E_c^0 = \Delta E_c \qquad (11.6)$$

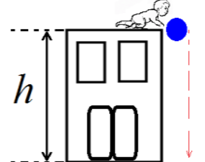
Este último resultado es el llamado **teorema del trabajo y la energía cinética:** *La variación de energía cinética es igual al trabajo de todas las fuerzas actuantes en un sistema.*

En nuestras ecuaciones usamos un caso particular de una fuerza constante en la misma dirección que la trayectoria. Sin embargo, se puede demostrar que las conclusiones que obtuvimos son generales: el trabajo de la fuerza resultante es igual a la variación de energía cinética, aunque la trayectoria del cuerpo sea curvilínea y la fuerza variable.

Esta relación es de gran utilidad: por ejemplo podemos medir las velocidades de un cuerpo de masa *m* conocida al inicio y al final de una cierta trayectoria, hacer las cuentas y obtener el producto $F\,\Delta x$ sin conocer el valor de F.

Ejemplo

Se deja caer desde un edificio de 10 m de altura (*h*), una piedra de masa 0,5 kg desde el reposo. ¿Con qué velocidad llega al piso?



Inicialmente, la velocidad de la piedra es cero (está en reposo), por lo tanto, su energía cinética es cero. $E_c^o = \frac{1}{2} m\, v_o^2 = 0$.

Cuando llega al piso la energía cinética es $E_c^f = \frac{1}{2} m\, v_f^2$. Es evidente que la pelota ganó energía, $\Delta E_c = \frac{1}{2} m\, v_f^2$.

El teorema del trabajo y la energía cinética nos dice que la energía ganada es igual al trabajo de la fuerza resultante sobre la pelota. Mientras la pelota cae, la única fuerza que actúa sobre ella es la fuerza peso. Como la piedra recorrió 10 m, la fuerza peso realizó un trabajo sobre la piedra:

$$T_P = P\, h \cos(0°) = mgh = 50\ \text{J} = \Delta E_c$$

Además, podemos calcular la velocidad con la que la pelota llega al piso, $\Delta E_c = E_c^f = \frac{1}{2} m\, v_f^2 = 50$ J, y despejando, se puede obtener que la velocidad final: $v_f = \sqrt{\frac{(2\,.\,50\,J)}{0{,}5\,kg}} = 7{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Potencia

Dijimos que el trabajo es el efecto que tiene una fuerza en el movimiento de un cuerpo, pero la definición de trabajo (ecs. 11.1 y 11.3) no depende del tiempo transcurrido. Una misma cantidad de trabajo puede realizarse en diferentes intervalos de tiempo. Por ejemplo: cualquier auto puede ir de velocidad cero hasta 100 km/h, pero un auto de gama media como el Renault Megane lo hace en 12,5 s mientras que un Bugati Veyron puede hacerlo en 2,5 s. Dado que las masas de ambos autos son similares (alrededor de 1200 kg Megane y 1800 kg el Bugati), la variación de energía cinética, y por lo tanto el trabajo, es comparable en ambos autos… ¡Pero sabemos, sin haber aprobado aún física, que el Bugati es más potente!

Este ejemplo muestra que no sólo es importante la cantidad de trabajo realizado sino también en cuánto tiempo se hace, o sea a qué velocidad se realiza. Entonces definimos una nueva magnitud física escalar denominada **potencia** que mide la velocidad a la que se hace el trabajo que se realiza sobre un cuerpo.

Calcularemos la **potencia media** como el trabajo realizado T dividido el intervalo de tiempo Δt que tarda en hacerlo, es decir, el trabajo por unidad de tiempo:

$$P_{media} = \frac{T}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\,.\,\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \vec{F}.\vec{v}_{media} \qquad (11.6)$$

Si consideramos el trabajo realizado en un instante de tiempo (lo que matemáticamente expresamos como un límite con $\Delta t \to 0$), podremos calcular la **potencia instantánea**:

$$P = \frac{dT}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} . \vec{v} \qquad (11.7)$$

La unidad en que se mide la potencia es el watt (o vatio) que se representa con la letra W:

$$[P] = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

Otras unidades de potencia son el caballo de fuerza (HP) o el caballo vapor (CV): 1 HP = 745,7 W y 1 CV = 735,35 W.

* ¿Qué potencia media desarrolla un motor que realiza un trabajo de 4 MJ por hora? Rta.: 1,1 kW
¿Qué trabajo realiza un microondas de 800 W en un minuto? Rta.: 48 kJ
Si nos mandan la factura de electricidad en kW•h, ¿nos cobran potencia o energía?

**** Con los conceptos explicados en esta clase pueden resolver los ejercicios 1 a 13 de la guía 6****

12. Ley de Conservación de la Energía Mecánica

Fuerzas conservativas y no conservativas

En la clase anterior mostramos que el trabajo realizado por la fuerza resultante es igual a la variación de energía cinética (ec. 11.6). También vimos que el principio de superposición dice que el trabajo de la fuerza resultante de varias fuerzas aplicadas a un cuerpo es igual a la suma de los trabajos de **todas** las fuerzas aplicadas (ec. 11.2): $T_{F_R} = \sum_i^N T_{F_i}$.

Cuando estudiamos dinámica, habíamos definido la fuerza resultante (o fuerza neta o fuerza total) como la suma (vectorial) de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo (ec. 6.1): $\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum_i^N \vec{F}_i$.

Las fuerzas que estudiamos en el curso son: el peso o fuerza gravitatoria, la normal, la tensión, la fuerza de rozamiento, la fuerza elástica. Veremos que estas fuerzas tienen distintas propiedades y se pueden clasificar en dos tipos: fuerzas **conservativas** y fuerzas **no conservativas o disipativas**. Entonces podemos descomponer el **trabajo de la fuerza resultante** (de todas las fuerzas) en el **trabajo realizado por las fuerzas conservativas** más el **trabajo realizado por las fuerzas no conservativas**:

$$T_{F_R} = T_{F_C} + T_{F_{NC}} = \Delta E_c$$

En breve veremos para que nos sirve esta diferenciación.

Calculemos, por ejemplo, el trabajo de la fuerza peso en la siguiente situación: Supongamos que queremos bajar una caja desde un balcón (de altura h) y llevarla hasta el auto, cruzando la vereda (que mide d). Entre las formas posibles de hacerlo, pensemos en dos que ilustramos en la figura: A- bajar la caja verticalmente y luego empujarla hasta la calle; B- poner una rampa desde la ventana a la calle y deslizar la caja. En cada caso calcularemos sólo el trabajo que realiza la fuerza peso.

En la opción A podemos distinguir dos tramos: en el primero, la distancia recorrida es h y el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es cero; en el segundo tramo, la distancia recorrida es d y el ángulo es 90°:

$$T_P = P\,h\cos(0°) + P\,d\cos(90°) = mgh$$

En la opción B tendremos que escribir el desplazamiento (la longitud de la rampa) usando el teorema de Pitágoras: $l = \sqrt{h^2 + d^2}$. Pero también tendremos que buscar el ángulo θ usando trigonometría. Dado que lo que necesitaremos calcular será $\cos(\theta°)$ podemos usar la definición ('cateto adyacente sobre hipotenusa') y escribir : $\cos(\theta°) = \frac{h}{l}$. El trabajo de la fuerza peso en el camino es:

$$T_P = P\,l\cos(\theta°) = Pl\ \frac{h}{l} = mgh$$

Encontramos que el trabajo realizado por la fuerza peso es igual en ambos recorridos; no depende del recorrido, sólo depende de las posiciones final e inicial. De esto se deduce que, si la posición final es igual a la inicial, el trabajo total (ida y vuelta) es cero. Para el ejemplo anterior, calculen el trabajo que haría la fuerza peso si alguien sube la caja a su posición inicial (ya sabemos que no importa el camino: elijan el que les guste) y verifiquen cuanto da.

** Llevo una pelota de 0,5 kg desde PB al tercer piso y luego la traigo de vuelta. ¿Cuál es el trabajo de la fuerza de peso en todo el recorrido? ** Rta.: 0

La propiedad que mostramos para la fuerza peso (fuerza gravitatoria) por la cual: “el trabajo realizado es el mismo sin importar el camino o trayectoria que se recorra” se extiende a otras fuerzas en la naturaleza: la fuerza elástica, la fuerza electrostática (esta última no la estudiaremos en este curso). Las fuerzas cuyo **trabajo es independiente del recorrido y sólo depende de la posición inicial y final del cuerpo**, reciben el nombre de **fuerzas conservativas**.

Otra forma de expresar esta propiedad es que **el trabajo realizado por una fuerza conservativa en un camino cerrado es cero**.

Por el contrario, las **fuerzas no conservativas** (a veces llamadas disipativas) no cumplen con la definición anterior: **el trabajo** que realiza para ir desde x_i hasta x_f **depende del camino elegido**; **el trabajo de una fuerza no conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es distinto de cero.**

Por ejemplo, si una caja se mueve una distancia d sobre una superficie con rozamiento dinámico μ, el trabajo de la fuerza de rozamiento es: $T_{froz}^{\text{ida}} = N\mu\, d\cos(180°) = -N\mu\, d$.

Si la caja vuelva a la posición inicial (recorriendo la distancia d en sentido contrario), el trabajo realizado por el rozamiento será: $T_{froz}^{\text{vuelta}} = N\mu\, d\cos(180°) = -N\mu\, d$

Es decir que el trabajo total será: $T_{froz}^{\text{ida}} + T_{froz}^{\text{vuelta}} = -2N\mu\, d$. No es cero, porque la fuerza de rozamiento no es conservativa.

Además del rozamiento, otros ejemplos de fuerzas no conservativas son la fuerza F aplicada para empujar o tirar algún bloque, la tensión de una soga, la fricción (con el aire o con otro fluido), etc.,

** Empujo una caja de 2 kg desde un punto A a otro punto B, a 3 m de distancia, y luego la traigo de vuelta al punto A. Hay un coeficiente de rozamiento dinámico entre la caja y el piso de 0,2. ¿Cuál es el trabajo que hace la fuerza de rozamiento en todo el recorrido? ** Rta.: - 24 J.

Energía potencial

Dijimos que el trabajo realizado entre dos puntos por una fuerza conservativa es un valor que sólo depende de las posiciones de estos puntos (llamémoslas $\boldsymbol{x_i}$ y $\boldsymbol{x_f}$). Entonces, podemos escribir el trabajo de una fuerza conservativa como la diferencia de una función que depende de la posición.

$$T_{F_C} = E_p(x_i) - E_p(x_f). \qquad (12.2)$$

donde T_{F_C} indica el trabajo realizado por una fuerza conservativa F_C y definimos a la función $E_p(x)$ como la **energía potencial** asociada a la posición o configuración que tiene el cuerpo sobre el cual está aplicada F_c. Su nombre indica que el cuerpo o sistema (de cuerpos) tiene el "potencial" de una fuerza aplicada capaz de realizar trabajo. En cierto sentido, se puede considerar que la **energía potencial es trabajo almacenado**.

Por lo visto anteriormente en el caso de la fuerza peso, podemos definir la energía potencial gravitatoria como:

$$E_{pg}(h) = mgh \qquad (12.3)$$

Se puede decir que cuando un cuerpo se encuentra a una altura h, tiene una energía almacenada que es igual al trabajo que haría la fuerza peso si el cuerpo cayera desde esa altura. El valor de la energía potencial E_p depende del punto de referencia que se elija; la elección del cero (desde donde se mide h), $h_o = 0$, es arbitraria. Como nos interesa estudiar la variación de energía potencial ΔE_p entre dos posiciones (A y B) que se calcula como:

$$\Delta E_p = E_p^B - E_p^A = mgh_B - mgh_A\,, \qquad (12.4)$$

su valor será el mismo independientemente de la elección de la posición de referencia. Sin embargo, generalmente vamos a considerar el eje vertical positivo hacia arriba: cuánto más grande sea h, más energía potencial tiene el cuerpo.

**¿Cuál es la energía potencial de una manzana de 100 g en un árbol a una altura de 2 m? ** Rta.:2 J.

Como dijimos, la fuerza elástica es también una fuerza conservativa. En la Fig. 11.3 ilustramos cómo el trabajo realizado por un resorte para desplazar un cuerpo con $x_o = 0$ es:

$$T_{Fel}(x) = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

es decir, el trabajo realizado depende de la posición x.

Análogamente a lo que hicimos en el caso de la fuerza gravitatoria, podemos decir que un resorte tiene energía almacenada y definir la energía potencial elástica como:

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \qquad (12.5)$$

y a la variación de energía potencial elástica como:

$$\Delta E_{pe} = E_{pe}(x) - E_{pe}(x_o) = \frac{1}{2}k\Delta x^2 - \frac{1}{2}k\Delta {x_o}^2 \quad (12.6)$$

**¿Cuál sería la energía necesaria para comprimir 2 cm un resorte de constante elástica k = 80 N/cm? **
Rta.: 1,6 J

Ley de Conservación de la Energía

Teniendo en cuenta que hemos clasificado las fuerzas en conservativas y no conservativas y que el teorema del trabajo y de la energía cinética establece que: $T_{total} = \Delta E_c$, podemos descomponer al trabajo total (trabajo de todas las fuerzas) como el trabajo realizado por las fuerzas conservativas más el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, $T_{total} = T_{Fc} + T_{FNC} = \Delta E_c$. A su vez, hemos deducido en la sección anterior que los trabajos de las fuerzas conservativas como el peso (fuerza gravitatoria) y la fuerza elástica son iguales a la variación de la energía potencial correspondiente cambiada de signo, $T_{F_C} = -\Delta E_p$, podemos entonces reescribir el teorema de la siguiente manera:

$$T_{F_C} + T_{F_{NC}} = -\Delta E_p + T_{F_{NC}} = \Delta E_c \ ,$$

reordenado los términos de la ecuación anterior nos queda:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = T_{F_{NC}} \ . \quad (12.7)$$

Si definimos la energía mecánica E_M de un cuerpo o sistema de cuerpos como la suma de la energía cinética E_c y de la energía potencial E_p ,

$$E_c + E_p = E_M, \quad (12.8)$$

queda que:

$$\Delta E_M = T_{F_{NC}} \quad (12.9)$$

Es decir: "*La variación de la energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas*".

De aquí se deduce que, si no hay fuerzas no conservativas actuando sobre el cuerpo, $T_{FNC} = 0$ y entonces:

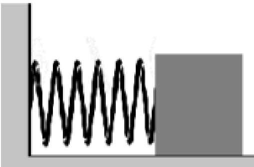
$$\Delta E_M = 0 \quad (12.10)$$

Es decir, "***en ausencia de fuerzas no conservativas la energía mecánica del sistema se conserva***".

Estas dos expresiones constituyen la **Ley o Principio de Conservación de la Energía Mecánica y** nos permitirá conocer las posiciones y velocidades de un sistema sin necesidad de resolver las ecuaciones de Newton.

Ejemplo 1

Consideremos un resorte de constante elástica k = 600 N/m comprimido $\Delta x_o = 0{,}1\ m$ con un bloque de masa 0,3 kg apoyado en su extremo que inicialmente está en reposo.



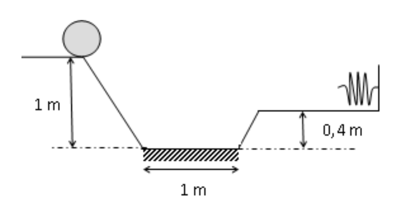
Calcule la velocidad que adquiere el bloque una vez que es soltado el resorte y ya no está comprimido.

El cuerpo se encuentra inicialmente en reposo, por lo tanto su energía cinética inicial es cero, $E_c^o = 0$. Luego de ser soltado, adquiere velocidad y su energía cinética final será, $E_c^f = \frac{1}{2} m\, v_f^2$. El resorte, al estar comprimido, tiene almacenada una energía potencial elástica: $E_{pe}(x_o) = \frac{1}{2}k\Delta {x_o}^2 = \frac{1}{2}\ 600 \frac{\text{N}}{\text{m}}\ .(0{,}1\ \text{m})^2 = 3\ \text{J}$. Usando las ecuaciones 12.8 y 12.10 podemos obtener que la velocidad que adquiere el bloque:

$$E_c^f = E_{pe}(x_o) \rightarrow \frac{1}{2} m\, v_f^2 = 3\ \text{J} \rightarrow\ v_f = \sqrt{\frac{(2\ .\ 3\ J)}{0{,}3\ kg}} = 4{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 2

Se deja caer un objeto de masa 1 kg por una pendiente, pasa por una zona horizontal con rozamiento (μ_d= 0,5) y luego es detenido por un resorte que se comprime 0,1 m. ¿Cuánto vale la constante del resorte?



En el momento inicial, el objeto "se deja caer", es decir que $v_i = 0$ y, por lo tanto, $E_C^i = 0$. Su energía potencial gravitatoria en ese momento será $E_{pg}^i = mgh_i$. En el momento inicial, no hay ningún resorte asociado al objeto, de modo que no tiene sentido pensar en energía potencial elástica ($E_{pe}^i = 0$). La energía mecánica inicial será, entonces: E_M^i=$E_{pg}^i = mgh_i$.

Consideraremos el momento "final", al instante en que el objeto se ha detenido comprimiendo el resorte. Como está detenido, otra vez, su energía cinética será cero ($E_C^f = 0$). Su energía potencial gravitatoria en ese momento será $E_{pg}^f = mgh_f$. Ahora sí tenemos que considerar la energía potencial elástica: $E_{pe}^f = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, donde Δx es la compresión del resorte. La energía mecánica final será E_M^f=$E_{pg}^f + E_{pe}^f = mgh_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2$.

La variación de energía mecánica se escribirá como $\Delta E_M = E_M^f - E_M^f = mgh_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2 - mgh_i$.

Por otra parte, sabemos que la variación de energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas. Entonces, debemos pensar cuál/cuales (si las hay) son las fuerzas no conservativas que hacen trabajo… En este caso, solo tenemos la fuerza de rozamiento:

$$\Delta E_M = T_{Froz} = F_{roz}dcos(180°) = N\mu_d d(-1)$$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre se puede ver que en la zona donde hay rozamiento, la normal es igual al peso: $T_{Froz} = -mg\,\mu_d d$. Entonces, $\Delta E_M = mgh_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2 - mgh_i = -mg\mu_d d$, de donde podremos despejar el valor de la constante del resorte:

$$k = \frac{2mg(h_i - h_F - \mu_d d)}{\Delta x^2} = 200\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Ejemplo 3

Un cuerpo de masa 5 kg se mueve sobre un plano horizontal bajo el efecto de una fuerza de 200 N aplicada formando un ángulo de 60° con el piso. Calcule la velocidad del cuerpo tras haber recorrido 90 m, si parte del reposo.

Datos: $m = 5$ kg $F = 200$ N ; $\theta = 60°$ $\Delta x = 90$ m $v_0 = 0$

"El trabajo de la fuerza resultante es igual a la variación de energía cinética".

$$T_{total} = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$T_{total} = T_F$ porque tanto P como N son perpendiculares a la trayectoria.

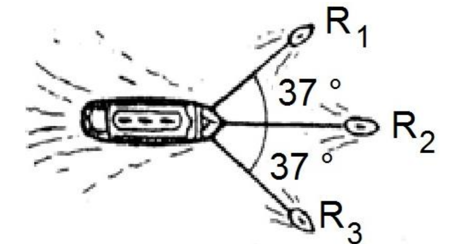
$$200\text{ N}.\,90\text{ m}.\cos(60°) = \frac{1}{2}5\text{kg}\,v^2 \rightarrow v = 60\text{ m/s}$$

**** Con los conceptos explicados en esta clase pueden resolver los ejercicios 14 a 25 de la guía 6****

Guía de Problemas N°6: Trabajo y Energía

Problema 1: Sobre un cuerpo que se desplaza 20 m está aplicada una fuerza constante, cuya intensidad es de 500 N, que forma un ángulo α con la dirección del desplazamiento. Calcular el trabajo realizado por esa fuerza para los siguientes valores del ángulo a) $\alpha = 0^o$, b) $\alpha = 45^o$, c) $\alpha = 60^o$, d) $\alpha = 90^o$, e) $\alpha = 120^o$, f) $\alpha = 180^o$.

Problema 2: Tres remolcadores llevan un barco hacia su dársena, tirando cada uno con una fuerza constante de $3\,10^5$ N en un recorrido de 500 m, como se indica en la figura. Si la fuerza de rozamiento que ejerce el agua sobre el barco es de 10^5 N, determinar:

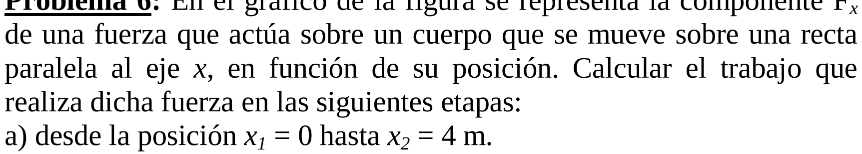


a) La resultante de las fuerzas que actúan sobre el barco.
b) El trabajo que realiza la fuerza resultante.
c) El trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan.
d) La suma de los trabajos calculados en c. Comparar con el resultado del inciso b.

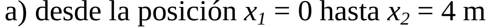
Problema 3: Una fuerza vertical de 180 N levanta un balde de 15 kg a una altura de 4 m. Determinar:
a) el trabajo realizado por la fuerza aplicada.
b) el trabajo que realiza la fuerza peso.
c) la velocidad final del balde, si inicialmente estaba en reposo.

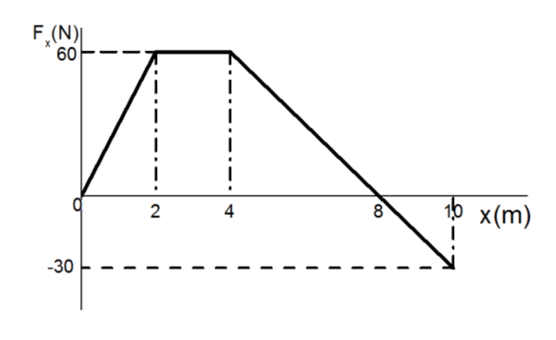
Problema 4: Determinar el trabajo que realiza la fuerza que ejerce un señor sobre su portafolios, de 4 kg, en los siguientes casos que son algunas de las etapas de su viaje:
a) Lo sostiene durante media hora mientras espera el colectivo.
b) Corre con él 4 m, con velocidad constante horizontal, para alcanzarlo.
c) Lo levanta 1,2 m al entrar al mismo.
d) Lo deja en el portavalijas durante un trayecto de 6 km con aceleraciones y tramos curvos.
e) Lo baja en la terminal, caminando por una rampa de 20 m de longitud, que forma un ángulo de 10º con la horizontal.
f) Lo levanta verticalmente 0,5 m con aceleración constante de 1 m/s^2, para atajar al perro que viene a saludarlo al llegar a casa.

Problema 5: Claudia pesa 600 N y viaja en un ascensor desde el 4to piso hasta planta baja. Hallar el trabajo que realiza la fuerza que hace el piso del ascensor sobre ella, en los siguientes tramos de 4 m de longitud cada uno:
a) arranque con aceleración constante de 0,5 m/s^2.
b) descenso con velocidad constante de 2 m/s.
c) frenado con aceleración constante de 0,5 m/s^2.

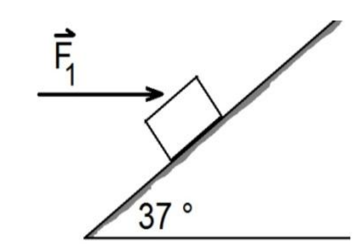


Problema 6: En el gráfico de la figura se representa la componente F_x de una fuerza que actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una recta paralela al eje x, en función de su posición. Calcular el trabajo que realiza dicha fuerza en las siguientes etapas:
a) desde la posición $x_1 = 0$ hasta $x_2 = 4$ m.
b) entre $x_2 = 4$ m y $x_3 = 10$ m.
c) entre $x_1 = 0$ y $x_3 = 10$ m.



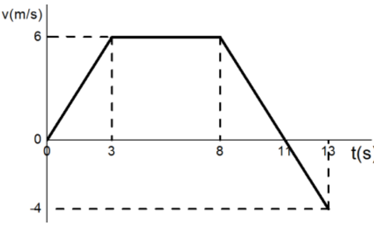


Problema 7: Un bloque de 50 kg asciende por el plano inclinado de la figura y recorre 2 m sobre el mismo, bajo la acción de una fuerza horizontal F_1 de 600 N. Actúa además una fuerza de rozamiento de 10 N entre el bloque y el plano. Calcular:
a) El trabajo que realiza F_1
b) El trabajo que realiza la fuerza de rozamiento.
c) El trabajo que realiza la fuerza peso.
d) El trabajo que realiza la fuerza normal.
e) Determinar la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcular su trabajo.
f) Calcular, usando cinemática, la velocidad del bloque al terminar de recorrer los 2 m, si al comienzo tenía una velocidad de 0,6 m/s.
g) Hallar las energías cinéticas inicial y final del bloque.



Problema 8: Comparar las energías cinéticas de dos cuerpos, *A* y *B*, idénticos entre sí salvo en lo mencionado en cada caso:
a) *A* se mueve en el mismo sentido que *B* con el doble de velocidad.
b) *A* se mueve hacia la derecha, mientras que *B* lo hace hacia la izquierda, con velocidades de igual intensidad.
c) *A* sube verticalmente, mientras que *B* cae, en un instante en que sus velocidades son de igual módulo.
d) *A* describe una circunferencia, y *B* sigue una trayectoria rectilínea, con velocidades de igual intensidad.
e) *A* cae verticalmente, mientras B se desliza sobre un plano inclinado, en un instante en que sus velocidades son de igual intensidad.
f) Se mueven con velocidades iguales, pero la masa de *A* es el doble de la masa de *B*.

Problema 9: En el gráfico de la figura se representa la velocidad de un móvil de 20 kg, en función del tiempo. Encontrar el trabajo que realiza la fuerza resultante de las que actúan sobre el mismo, para las distintas etapas de su movimiento y para el viaje total.



Problema 10: Valiéndose de consideraciones de trabajo y energía cinética, demostrar que si un conductor aplica los frenos a fondo, la distancia en que se detiene un automóvil de masa m que marcha por una carretera horizontal a velocidad v es $d = \frac{v^2}{2\mu_d g}$, donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico entre las gomas y el piso. ¿En qué factor se incrementa la distancia de frenado si el automóvil duplica su velocidad?

Problema 11: Se empuja un carro de masa m = 20 kg sobre una superficie sin rozamiento por medio de una fuerza de 30 N durante 10 segundos. Suponiendo que inicialmente estaba en reposo:
a) Calcular la potencia media desarrollada en los 10 segundos.
b) Calcular la potencia instantánea a los 0 s, 5 s y 10 s.

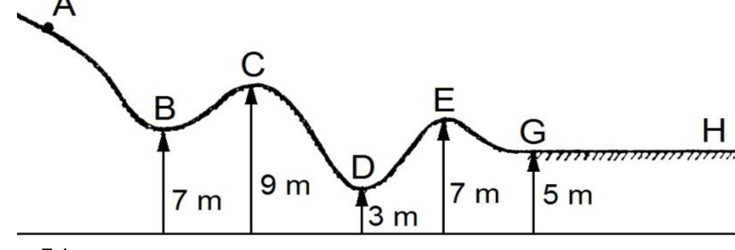
Problema 12: Un automóvil de 1500 kg que parte del reposo por una pista horizontal puede alcanzar en 10 s una velocidad de 108 km/h. Si no se tuviera en cuenta el rozamiento con el aire y considerando que la aceleración es constante, graficar en función del tiempo:
a) La velocidad del automóvil.
b) La potencia instantánea correspondiente.
c) Hallar la potencia máxima desarrollada.

Problema 13: Una grúa iza verticalmente una caja de caudales de 400 kg que parte del reposo con aceleración constante durante 2 s hasta alcanzar una velocidad de 2 m/s; prosigue con ella durante 5 s para frenar luego y detenerse en otros 2 s.
a) Graficar la velocidad de la caja en función del tiempo.
b) Graficar la fuerza que ejerce el cable en función del tiempo.
c) Graficar la potencia que desarrolla la fuerza que ejerce el cable en función del tiempo.
d) A partir de este último gráfico, determinar el trabajo que realiza dicha fuerza y expresarlo en kWh. Comparar con el trabajo del peso.
e) Determinar la potencia media desarrollada por el cable.
f) Hallar la potencia máxima en todo el proceso.

Energías potencial y mecánica. Fuerzas disipativas.

Problema 14: Un velero de 1200 kg que es echado al agua, se desliza por una rampa inclinada 10° con la horizontal, con velocidad constante.
a) Graficar la energía potencial, cinética y mecánica del velero en función de su posición sobre el plano.
b) Hallar la expresión de la variación de energía mecánica que experimenta, en función de la altura y en función del desplazamiento.
c) Determinar la fuerza resultante que actúa sobre el velero.

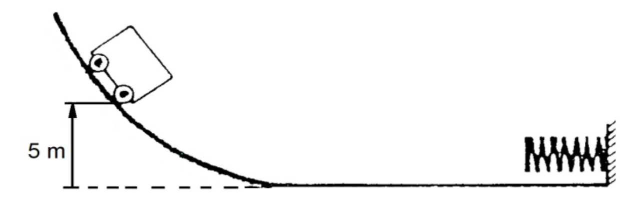
Problema 15: La figura representa la ladera de una montaña por la que se desliza con rozamiento despreciable un esquiador de 80 kg. Se sabe que pasa por el punto *A* con una velocidad de 5 m/s y por el punto *C* a 10 m/s.
a) Calcular la energía: potencial gravitatoria, cinética y mecánica total en los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, y *G*.



b) Hallar la distancia qué necesitará para detenerse en la planicie horizontal si a partir de *G* actúa una fuerza de rozamiento cuya intensidad es de 500 N.

Problema 16: Una caja de 30 kg es arrastrada en línea recta, apoyada sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza horizontal constante de 60 N. Determinar el coeficiente de rozamiento entre la caja y el plano, para que se desplace manteniendo constante su energía mecánica. La misma caja desciende por un plano inclinado de 37º donde el coeficiente de rozamiento es $\mu_d = 0{,}25$. Determinar qué fuerza paralela al plano la hará moverse con energía mecánica constante.

Problema 17: Un bloque de 6 kg que está en reposo, se deja caer desde una altura de 5 m por una rampa curva que finaliza en un tramo recto horizontal, como muestra la figura, para el que puede despreciarse el rozamiento en todo el viaje. En la cabecera hay un resorte, inicialmente no deformado, cuya constante elástica es 15000 N/m.



a) Determinar el desplazamiento máximo del extremo del resorte.
b) Calcular la intensidad máxima de la fuerza que el resorte ejerce sobre la pared.

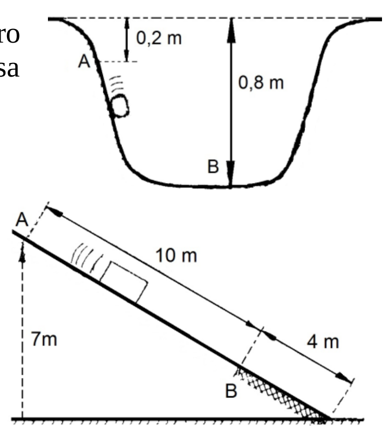


c) Describir el movimiento del bloque.

Problema 18: Una caja de 30 kg se desliza sobre una superficie horizontal con rozamiento, cuyo coeficiente dinámico es 0,40, hasta chocar con un resorte horizontal de masa despreciable, cuya constante elástica es 7200 N/m y que se comprime 0,5 m desde su posición inicial no deformada. Calcular la velocidad con que la caja choca con el resorte, y la que tenía a 10 m antes del choque (considere rozamiento en todo momento).

Problema 19: Se dejan caer dos cuerpos, partiendo del reposo, desde una altura *h*: uno libremente y el otro por un plano inclinado con rozamiento despreciable. Hacer un esquema del problema y a partir de consideraciones energéticas demostrar que ambos cuerpos llegan al suelo con la misma velocidad.

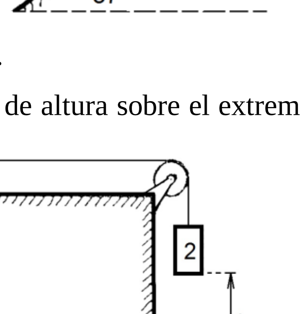
Problema 20: Un pan de jabón mojado se desliza con rozamiento despreciable dentro de una bañera vacía, siguiendo la trayectoria mostrada en la figura, de modo que pasa por el punto *A* con una velocidad de 2 m/s.
a) Determinar con qué velocidad pasará por el punto más bajo de su trayectoria.
b) Hallar a qué altura máxima llegará al otro lado.



Problema 21: Un cuerpo de masa 10 kg desciende desde el punto *A*, partiendo del reposo por un plano inclinado de 7 m de altura y 14 m de longitud. En los primeros 10 m (tramo *AB*) el rozamiento es despreciable, en tanto que en los últimos 4 m (tramo *BC*) actúa una fuerza de rozamiento que hace que el cuerpo se mueva con velocidad constante. A partir de consideraciones energéticas, hallar:
a) el coeficiente de rozamiento dinámico en el tramo *BC*.
b) la velocidad con que el cuerpo llega a la base (punto *C*).
c) cómo se modifican los resultados anteriores si la masa del objeto fuera la mitad.

Problema 22: Un cajón de 200 kg, lanzado hacia arriba por un plano inclinado 37º con una velocidad inicial de 9 m/s, tiene aplicada una fuerza horizontal constante de 800 N. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cajón y el plano es $\mu_d = 0{,}25$.
a) A partir de un planteo energético, hallar qué distancia recorre sobre el plano hasta detenerse.
b) Calcular la variación de energía mecánica que sufre en el ascenso.
c) Hallar la potencia instantánea correspondiente a cada una de las fuerzas actuantes, en el punto de partida.
d) Determinar la potencia media desarrollada por cada una de las fuerzas durante el ascenso.

Problema 23: El coche de un ascensor, de 400 kg, está en reposo en el primer piso, a 3 m de altura sobre el extremo libre de un resorte paragolpes cuya constante elástica es 19200 N/m. En esas condiciones se rompe el cable que lo sostiene y automáticamente actúa un freno de fricción contra las guías que le aplica una fuerza vertical en sentido opuesto a su desplazamiento, cuyo módulo constante es 1600 N. Hallar:
a) La velocidad del coche al llegar al extremo del resorte.
b) La distancia máxima que lo comprimirá.
c) La altura máxima que alcanzará luego del primer rebote.



Problema 24: En el esquema de la figura se puede despreciar la masa de la cuerda y de la polea, así como todos los rozamientos. El carrito 1 tiene una masa de 80 kg y la del bloque 2 es 20 kg.
a) Por consideraciones energéticas hallar con qué velocidad llegará al piso el bloque 2 si ambos parten del reposo.
b) Si ahora hay rozamiento entre el carrito 1 y el plano y el coeficiente dinámico es $\mu_d = 0,16$, hallar nuevamente con qué velocidad llega al piso el bloque 2 si también parten del reposo.

Preguntas (25)

A. Responda si las afirmaciones siguientes son **Verdaderas** o **Falsas** justificando la respuesta.
i. Para subir un objeto se hace trabajo de signo opuesto al que se hace cuando se lo baja.
ii. Siempre que aumenta la energía cinética de un cuerpo, disminuye su energía potencial.
iii. El trabajo de las fuerzas no conservativas es siempre negativo.
iv. A veces el trabajo de la fuerza de rozamiento es positivo.
v. En la oscilación de un péndulo, la tensión del hilo no trabaja.
vi. Cuanto mayor sea la pendiente de un plano inclinado sin rozamiento, mayor será la velocidad final que adquiera un cuerpo al que se lo suelta y desciende diez metros de altura.
vii. En el movimiento circular la fuerza centrípeta no hace trabajo.
viii. La energía cinética de un péndulo ideal se conserva mientras el péndulo oscila.
ix. Las fuerzas perpendiculares a las superficies de apoyo (normal) son fuerzas conservativas.
x. Es posible que el trabajo realizado por una sola de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo sea mayor que la variación de su energía cinética.

B. Dos cajas idénticas se mueven distancias iguales, rectas y horizontales. La caja *A* experimenta una fuerza neta constante *F* en un ángulo (con la horizontal y la caja *B* experimenta una fuerza neta constante de 2*F* aplicada en un ángulo de 2(con la horizontal. Entonces:
i. se hace más trabajo sobre *A* que sobre *B*,
ii. se hace más trabajo sobre *B* que sobre *A*,
iii. se hace la misma cantidad de trabajo sobre cada caja,
iv. no se puede determinar sobre cuál caja se hace más trabajo a partir de los datos dados.

C. El trabajo realizado por una fuerza variable de la forma $F = kx$ es igual a:
i. kx^2
ii. kx
iii. el área bajo la curva *F* versus *x*
iv. ninguno de éstos.

D. Si se comprime un resorte 2 cm de su posición de equilibrio y luego 4 cm adicionales, ¿cuánto trabajo se realiza en la segunda compresión en relación a la primera?:
i. la misma cantidad
ii. el doble
iii. cuatro veces más
iv. ocho veces más.

E. El trabajo es:
i. siempre negativo
ii. una medida de transferencia de energía
iii. siempre igual al cambio de energía cinética
iv. todo lo precedente.

F. ¿Cuál de los siguientes objetos tiene la mayor energía cinética:
i. un objeto de masa 4*m* y velocidad *v*
ii. un objeto de masa 3*m* y velocidad 2*v*
iii. un objeto de masa 2*m* y velocidad 3*v*
iv. un objeto de masa *m* y velocidad 4*v*.

G. Si sólo una fuerza no conservativa actúa sobre un objeto
i. su energía cinética siempre es mayor que su energía potencial
ii. se conserva la energía mecánica
iii. se conserva su energía cinética
iv. se conserva la energía total.

H. Dos cuerpos de masas desiguales tienen la misma energía cinética y se mueven en la misma dirección y sentido. Si se aplica la misma fuerza de frenado a ambos, ¿cómo serán en comparación las distancias que recorren hasta detenerse?

I. Analizar las siguientes afirmaciones, para un bloque que desliza hacia arriba por un plano inclinado y luego baja:
i. Si en el plano inclinado no hay rozamiento el tiempo de subida es igual al de bajada
ii. Si en el plano inclinado no hay rozamiento la velocidad en *A*, v_A, a la ida es la misma que a la vuelta
iii. Si hay rozamiento en el plano inclinado el tiempo de subida es igual al de bajada
iv. Si hay rozamiento en el plano inclinado la velocidad en *A*, v_A, a la ida es la misma que a la vuelta.
v. Si hay rozamiento, dependiendo de los valores del coeficiente de rozamiento, el cuerpo puede no bajar.

Respuestas de la Guía N°1: Cinemática en una dimensión

1) a **5)** De elaboración personal

6) Distancia: 2040 m $\cong$ 2 km

7) **a)** $x(t) = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 6\text{m}$ t = -2 s **b)** $x(t) = -2\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 20\text{m}$ t = 10 s

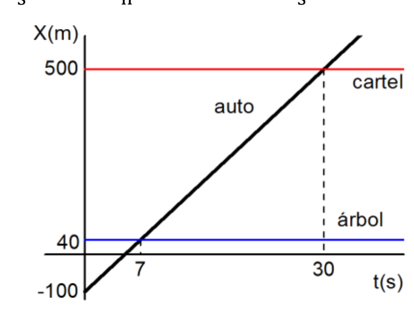
c) $x(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 8\text{m}$ t = 2 s

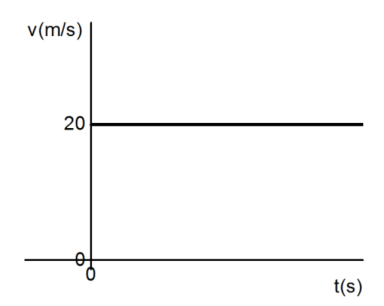
8) **a)** $v_{M\,0-2} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\,2-3} = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\,3-5} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\,5-7} = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\,7-8} = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\,8-9} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $v(1\text{s}) = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v(2{,}5\text{s}) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v(5\text{s})$ no está definida; $v(6\text{s}) = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9) **a)** $v_{auto} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $x(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 100\text{m}$ **b)** t = 7 s **c)** $d_{\text{árbol-cartel}}$ = 460 m

d) Gráficos



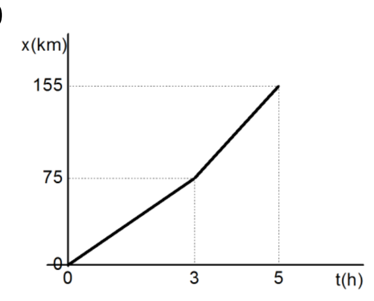


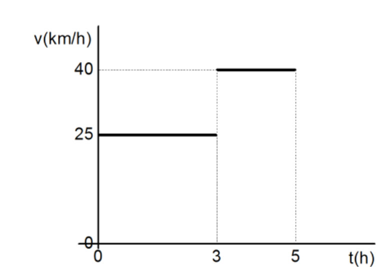
10) **a)** d_{total} = 155 km **b)** $v_M = 31\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) si 0 < t < 3h : $x(t) = 25\frac{\text{km}}{\text{h}}t$ $v = 25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

si 3h < t < 5h : $x(t) = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}(t - 3\text{h}) + 75\text{km}$ $v = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

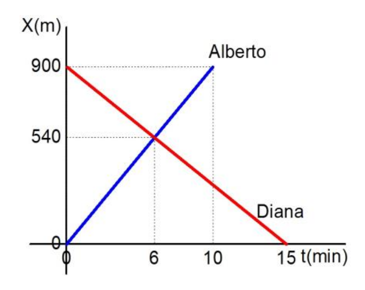






11) **a)** Se encuentran a las 15:06 h, a 360 m de la casa de Diana.

b) Gráfico: (eligiendo como origen del sistema de referencia la posición inicial de Alberto y tiempo t = 0 a las 15:00 hs)



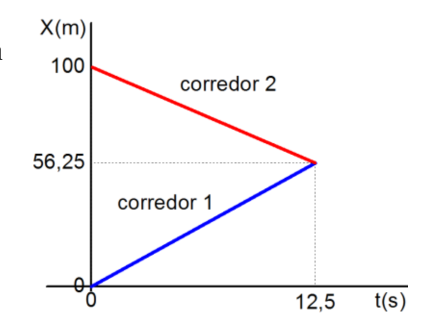
12) $v = 59{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

13) **a)** $x_1(t) = 4{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t$ $x_2(t) = -3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 100\text{m}$

b) Se encuentran 12,50 s más tarde.

c) Se encuentran a 56,25 m de la posición inicial del corredor que iba a 4,5 m/s

d) Gráfico

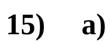


14) **a)** $x_1(t) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}t$ $\quad x_2(t) = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}(t - 1\text{h})$

b) Lo alcanzará 4 h luego de partir

c) Se encuentran a 400 km de Buenos Aires

d) Gráfico:



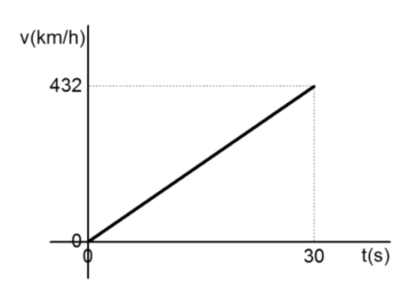
15) **a)** $a_B = 1{,}90\ \frac{\text{m}}{s^2}$; $a_E = 4{,}27\ \frac{\text{m}}{s^2}$ $\quad$ **b)** $a = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{s^2}$

16) $a = -3{,}33\ \frac{\text{m}}{s^2}$

17) **a)** $v(t) = 2{,}25\ \frac{\text{m}}{s^2}t$ $\quad$ **b)** $v(7s) = 15{,}75\ \frac{\text{m}}{s}$

c) $x(t) = 1{,}125\ \frac{\text{m}}{s^2}t^2$ $\quad$ **d)** Distancia recorrida: 55 m aproximadamente

18) **a)** $a = 4\ \frac{\text{m}}{s^2}$ $\quad$ **b)** $v = 432\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\quad$ **c) Gráfico**:



19) **a)** $v = 14\ \frac{\text{m}}{s}$ $\quad$ **b)** $\Delta x_{0-1} = 1{,}75\text{m}$; $\Delta x_{3-4} = 12{,}2\text{m}$ $\quad$ **c)** $a = -1{,}75\ \frac{\text{m}}{s^2}$

20) La distancia entre la boya y el barco será de 85,7 m aproximadamente

21) **a)** $a_1 = 0\ \frac{\text{m}}{s^2}$; $\quad a_2 = 2\ \frac{\text{m}}{s^2}$; $\quad a_3 = 2\ \frac{\text{m}}{s^2}$; $\quad a_4 = -4\ \frac{\text{m}}{s^2}$

Gráficos: rectas horizontales de ordenada igual a la aceleración.

b) Elaboración personal

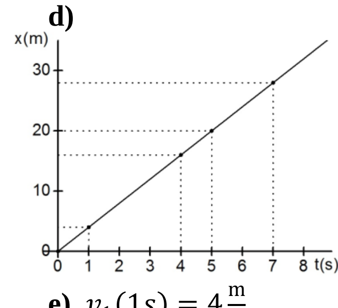
c) $v_1(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad x_1(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}t$

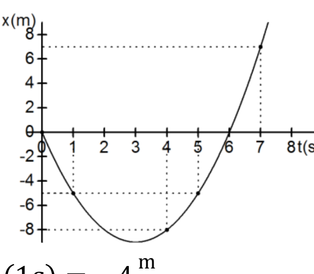
$v_2(t) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2\ \frac{\text{m}}{s^2}t$ $\quad x_2(t) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 1\ \frac{\text{m}}{s^2}t^2$

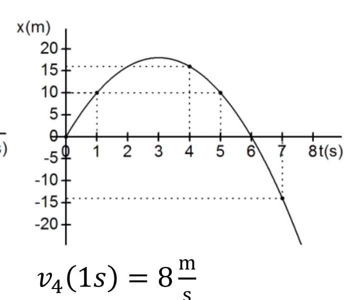
$v_3(t) = -6\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2\ \frac{\text{m}}{s^2}t$ $\quad x_3(t) = -6\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 1\ \frac{\text{m}}{s^2}t^2$

$v_4(t) = 12\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\ \frac{\text{m}}{s^2}t$ $\quad x_4(t) = 12\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 2\ \frac{\text{m}}{s^2}t^2$

d)







e) $v_1(1s) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad v_2(1s) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad v_3(1s) = -4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad v_4(1s) = 8\frac{\text{m}}{\text{s}}$

f) y **g)** Elaboración personal.

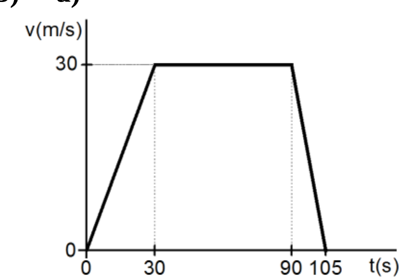
23) $a = -2{,}83\ \frac{\text{m}}{s^2}$; $\quad d = 16{,}7\text{m}$;

24) **a)** $v_{M\ AB} = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ BC} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ CD} = 1{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ DE} = -1{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ EF} = -1{,}67\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ FG} = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{M\ BG} = 0{,}09\frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) Es uniforme en los tramos AB, BC, EF, FG

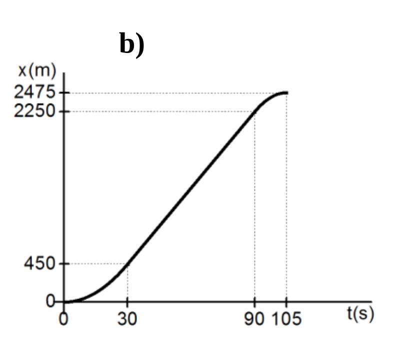
c) $v_D = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$

25) **a)**



a(m/s²): 1, 0, −2; t(s): 0, 30, 90, 105

b)



c) Se detiene a 2475 m del lugar de partida.

26) **a)** si $0 \le t \le 2 \quad a_1(t) = 5\frac{\text{m}}{s^2}$;

si $2 \le t \le 5 \quad a_2(t) = -1{,}33\frac{\text{m}}{s^2}$

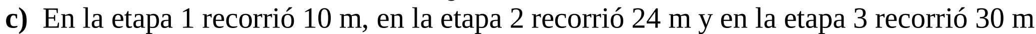
si $5 \le t \le 10 \quad a_3(t) = 0\frac{\text{m}}{s^2}$

b) si $0 \le t \le 2 \qquad x_1(t) = 2{,}5\frac{\text{m}}{s^2}t^2$

si $2 \le t \le 5 \quad x_2(t) = 10\text{m}+10\frac{\text{m}}{\text{s}}(t-2\text{s}) - 0{,}67\frac{\text{m}}{s^2}(t-2\text{s})^2$

si $5 \le t \le 10 \quad x_3(t) = 34\text{m}+6\frac{\text{m}}{\text{s}}(t-5\text{s})$

x(m): 64, 34, 10, 0; t(s): 0, 2, 5, 10



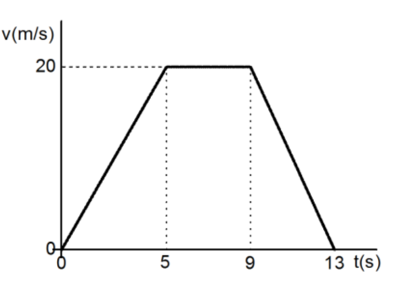
c) En la etapa 1 recorrió 10 m, en la etapa 2 recorrió 24 m y en la etapa 3 recorrió 30 m

d) Velocidad media: 6,4 m/s

27) **a)** Si $0 \le t \le 5 \qquad v_1(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}t$

si $5 \le t \le 9 \qquad v_2(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$

si $9 \le t \le 13 \qquad v_3(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} - 5\frac{\text{m}}{s^2}(t-9\text{s})$



b) Si $0 \le t \le 5 \qquad x_1(t) = 2\frac{\text{m}}{s^2}t^2$

si $5 \le t \le 9 \qquad x_2(t) = 50\text{m}+20\frac{\text{m}}{\text{s}}(t-5\text{s})$

si $9 \le t \le 13 \qquad x_3(t) = 130\text{m}+20\frac{\text{m}}{\text{s}}(t-9\text{s}) - 2{,}5\frac{\text{m}}{s^2}(t-9\text{s})^2$

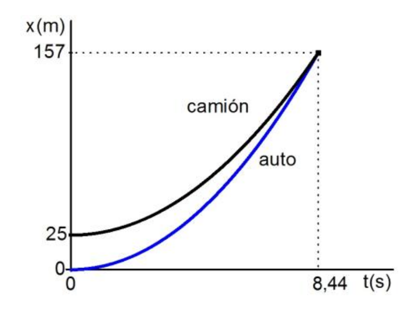
x(m): 170, 130, 50, 0; t(s): 0, 5, 9, 13

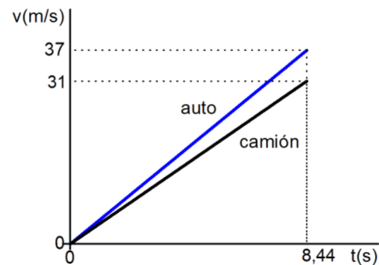
28) **a)** El auto tarda 8,4 s en alcanzar al camión.

b) Inicialmente, el camión estaba a 25 m del auto.

c) La velocidad del auto era 37 m/s y la velocidad del camión era 31 m/s.

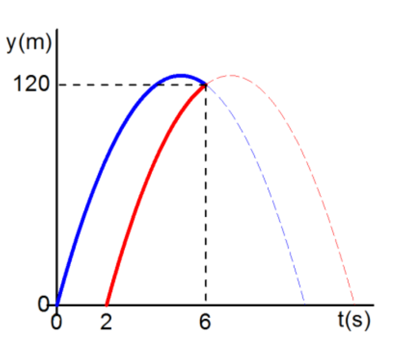
d)





Respuestas a la Guía de Problemas N°2: Movimiento en presencia de la gravedad

1) a) Subirá 7,2 m desde el punto del lanzamiento.
   b) El edificio mide 128 m.
   c) La pelota llegará al piso con una velocidad de 52 m/s hacia abajo.
2) Pasarán 9 s hasta que la distancia entre ambos objetos sea de 18 m.
3) El paracaidista recorrió 175 m.
4) La profundidad del pozo es 178,5 m.
5) a) El tiempo de caída en el aire es 0,6 s.
   b) La piedra llegó a la superficie del agua con una velocidad de 8 m/s hacia abajo.
   c) La profundidad del estanque es 26 m.
   d) Llegó al fondo del estanque con una velocidad de módulo 18 m/s
6) Se encontrarán a 120 m de altura, transcurridos 6 s desde que se arrojó la primera pelota. La primera pelota lanzada tendrá una velocidad de 10 m/s hacia abajo y la segunda de 10 m/s hacia arriba.



7) Isaac debe caminar a 4 m/s

8) a) La altura de la torre es, aproximadamente, 65 m.
   b) Caen al piso a 80 m, aproximadamente.
   c) La altura máxima, medida desde el piso, es 72,2 m.
   d) Caen al piso con una velocidad de módulo 41,2 m/s, a 23° de la vertical (v_x = 16 m/s; v_y = −38 m/s).
9) a) V_o = 29,9 m/s
   b) Se clavó a 29,7 m de altura.
   c) v_x = 18 m/s; v_y = −1,12 m/s; a_x = 0 m/s^2, a_y = −10 m/s^2 .
   d) Ecuación de la trayectoria: $y = 1{,}25\ m + 1{,}33x - \frac{5}{324\ m}x^2$
10) a) La pelota partió de una altura de 9 m.
   b) Con una velocidad de 13 m/s, con un ángulo de 67,4° abajo de la horizontal; (v_x = 5 m/s; v_y = −12 m/s).
   c) Ecuación de la trayectoria: $y = 9\ m - \frac{0{,}2}{m}x^2$ (tomando el origen en piso bajo Natalia).
11) a) Tiempo de vuelo hasta la red es 0,5 s
   b) La velocidad inicial es de v_x = 16 m/s.
   c) La pelota toca el suelo, aproximadamente, 2,5 m más allá de la red.
12) a) Sí, por ejemplo el tiro oblicuo (movimiento en el plano x-y pero aceleración sólo en y).
   b) Sí, por ejemplo en el instante en que se alcanza la altura máxima de un tiro vertical.
13) a) La velocidad tiene que estar comprendida entre 5 m/s y 6 m/s.
   b) Cae al suelo. Justificación: No entra en el cesto pues la velocidad con que es lanzado el bollo de papel es menor que 5 m/s. Cuando pasa por el punto E (x = 1 m) el bollo está a 89 cm del piso, es decir 14 cm sobre el punto E.
14) a) Las componentes de la velocidad inicial son v_x = 0,75 m/s; v_y = 8 m/s.
   b) La velocidad en el punto más alto es v_x = 0,75 m/s; v_y = 0 m/s
   c) La velocidad con que llega es v_x = 0,75 m/s; v_y = −8 m/s.
15) Alcanzará la pelota si corre a 7,32 m/s
16) Sí, convierte el penal. Altura alcanzada por la pelota: 9,2 m

Respuestas a la Guía de Problemas Nº 3: Dinámica. Leyes de Newton

1) a) $\mathbf{F}_1 = (12{,}62 ; 18{,}02)$ N $\mathbf{F}_2 = (-16{,}31 ; -7{,}61)$ N $\mathbf{F}_3 = (6{,}76 ; -14{,}50)$ N
b) $\mathbf{F}_R = (3{,}07 ; -4{,}09)$ N
c) $F_R = 5{,}11$ N $\theta \cong 53{,}1$ debajo de la horizontal

2) $F_{R1} = 22{,}1$ N ; $\theta_1 = 25°$ $F_{R2} = 9{,}4$ N ; $\theta_2 = -73°$ $F_{R3} = 37$ N; $\theta_3 = -38°$

3) Las componentes de cada fuerza sobre el poste: $T_x \cong 287$ N $T_y \cong 410$N

4) La fuerza peso (720 N hacia abajo) es equilibrada por la fuerza de resistencia del aire (720 N hacia arriba).

5) (a) $T_{AC} = T_{BC} \cong 261$ N (b) $T_{AC} = T_{BC} = 400$ N (c) $T_{AC} = 200$ N; $T_{BC} \cong 346$ N
(d) T_{AC} =400 N $T_{BC} \cong 566$ N

6) Peso: ≅ 1333 N

7) Tensión: 2790 N

8) Peso en Marte: 258,4 N

9) a) Aceleración en la luna 0,2 m/s^2 (aprox.) b) Aceleración en la tierra 0,2 m/s^2 (aprox.)

10) En ambos casos la fuerza de frenado será en sentido contrario al movimiento. La magnitud será 8000 N para el primer auto y 10000 N para el segundo.

11) La masa del carrito con carga es 120 kg. La nueva aceleración será el séxtuple de la anterior: 15 m/s^2

12) a) Aceleración del bloque: 1,5 m/s^2 b) Fuerza que ejerce el piso (normal): 50,6 N (aprox).

13) a) Aceleración de ambos bloques: 1 m/s^2. Fuerza de contacto: 1 N. b) Fuerza de contacto: 2 N.

14) a) ***ii*** b) ***i*** c) ***ii*** d) ***iv***.

15) a) a = 6 m/s^2 (hacia arriba); T = 32 N b) a = 0; T = 20 N
c) a = 4 m/s^2 (hacia abajo); T = 12 N d) a = 10 m/s^2 (hacia abajo: es g); T = 0.

16) a) b)

$A \ \{x: y: \quad -F_A \cos(30°) + T = m_A a \ F_A \mathrm{sen}(30°) + N_A - P_A = 0$

$B \ \{x: y: \quad -T + F_B = m_B a \ N_B - P_B = 0$

c) Aceleración (aprox.) 4,5 m/s^2 hacia la izquierda d) T = 122,6 N (aprox)

17) a) m_B = 40 kg b). T = 200 N c) de elaboración personal

18) a) F = 200 N b) T = 600 N c) F' = 400 N; T' = 720 N
d) Si se deja de aplicar la fuerza, la tensión que soporta la cuerda es 480 N, la aceleración del sistema es de 2 m/s^2 (en sentido contrario a la anterior) . El movimiento continuará en el mismo sentido, pero irá desacelerándose. Eventualmente se detendrá y empezará a moverse en sentido contrario (el cuerpo 2, baja y el 1 sube)

19) a) aceleración: 2,24 m/s^2 , con sentido contrario al movimiento (se está frenando) y T = 290 N b) a_A = 7,0 m/s^2; a_B = 5 m/s^2

20) En todos los casos la fuerza que ejerce el piso sobre la persona es la fuerza de contacto, fuerza normal: a) 700 N; b) 736,75 N; c) 663,25 N; d) 700 N; e) 700 N; f) 0 N.

21) a) T = 180 N; b) m_B = 25,7 kg; c) m_B' = 28,2 kg; d) su aceleración sería mayor que la gravedad;
e) Recorre 0,9 m.

22) a) m_1 = 4 kg b) v = 4 m/s; c) 4 m; d) Fuerza que soporta el techo: 96 N.

Respuestas a la Guía de Problemas N° 4: Dinámica: Rozamiento - Fuerzas elásticas

1) Fuerza horizontal: 395 N

2) Coeficientes de rozamiento: μ_e = 0,79 μ_d = 0,56

3) a) Fuerza neta: Cero b) Fuerza neta: 95 N

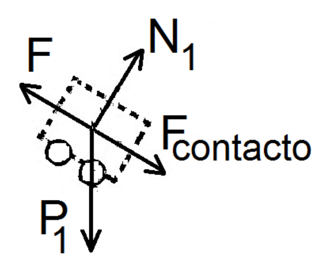
4) a) Tensión en la cuerda: 319,5 N b) Aceleración inicial: 1,3 m/s^2

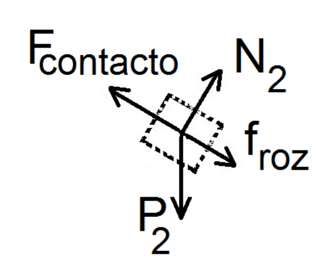
5) a) a = 1,83 m/s^2 b) a = 3 m/s^2 c) a = 2,83 m/s^2

6) a) $m_{2\ máxima}$ = 10 kg b) $m_{2\ mínima}$ = 2 kg c) F_r = 19,8 N (hacia abajo)

7) a) Mínimo valor de F = 19,93 N b) a = 2,99 m/s^2 c) T = 24,97 N

8) a) Diagramas de cuerpo libre





b) Aceleración del sistema: 4,73 m/s^2 (hacia arriba, el sistema se acelera)

c) Fuerza de contacto: 185,12 N

9) El caso B tiene mayor aceleración.

10) a) Peso mínimo del bloque C: 66 N b) Aceleración del bloque A: 2,33 m/s^2

11) a) F_{max} = 27 N , b) a = 3 m/s^2

12) k = 500 N/m

13) Δx = 9,8 cm

14) a) k = 600 N/m b) a = 2,5 m/s^2 c) Δx = 0,2 m

15) a) a_A = 12,5 m/s^2 , a_B = 0 b) a_A = 5 m/s^2 , a_B = 10 m/s^2

Respuestas a la Guía de Problemas N° 5: Movimiento circular uniforme. Fuerza Gravitatoria

1) a) $\omega =$ 3,5 1/s , V_T = 0,7 m/s , a_C = 2,4 m/s^2

b) $\omega =$ 3,5 1/s , V_T = 0,35 m/s , a_C = 1,22 $^{m/s2}$

c) tiempo en girar 780 grados = 3,9 s, tiempo para 20 revoluciones = 36 s

2) Velocidad angular: $\omega =$ 66,7 1/s

3) R = 191 m a_C = 2,09 m/s^2

4) a) Período: 0,1 s b) Velocidad angular: 62,83 1/s

c) Velocidad tangencial: 31,41 m/s d) Aceleración centrípeta: 1972 m/s^2

5) a) 13,69 N b) 33,69 N

6) Aceleración centrípeta: 1,23 m/s^2 Fuerza centrípeta: 61,68 N (radial hacia el centro)

7) a) F b) F c) V d) F

8) Velocidad tangencial: 7,73 km/s, Aceleración centrípeta: 9 m/s^2

Fuerza gravitatoria: 900 N

9) Ambos cuerpos pesan aproximadamente: 7,71 N

10) Gravedad en la Luna: 1,70 m/s^2

Si, peso del astronauta con su equipo en la Luna: 204 N $<$ 400N

11) Altura: $H = (\sqrt{2} - 1)R_T \cong$ 2634 km. La gravedad no se anula a ninguna altura.

12) a) $r_{orbita} \approx 1{,}5x10^8$ km b) F = 3,56 10^{22} N c) Masa del Sol $\cong$ 2 10^{30} kg

13) a) a = 9,0 10^{22} m/s^2 b) F = 8,2 10^{-8} N

14) a) F b) V c) V

15) a) 2,6 10^{-6} 1/s b) 987 m/s c) ac = 2,6 10^{-3} m/s^2

16) a) Fg = 2 N b) M= 2,7 10^{22} kg c) h = 3180 km

17) Un año duraría 516,6 días.

Respuestas a la Guía de Problemas N° 6: Trabajo y Energía

1) a) T = 10^4 J b) T = 7071 J c) T = 5000 J d) T = 0 e) T = −5000 J f) T = -10^4 J

2) a) Fuerza resultante: F_R = 6,8 10^5 N (hacia la derecha) b) T_{FR} = 3,4 10^8 J
c) T_{R1} = 1,2 10^8 J; T_{R2} = 1,5 10^8 J ; T_{R3} = 1,2 10^8 J ; T_{Froz} = −5 10^7 J d) ΣT_i = 3,4 10^8 J

3) a) T_F = 720 J; b) T_P = −600 J c) v_f = 4 m/s

4) a) T = 0 b) T = 0 c) T = 48 J d) T = 0 e) T = −139 J f) T = 22 J

5) a) T = −2280 b) T = −2400 J c) T = −2520 J

6) a) $T_{0\text{-}3}$ = 360 J $T_{3\text{-}8}$ = 0 $T_{8\text{-}11}$ = −360 J $T_{11\text{-}13}$ = 160 J $T_{0\text{-}13}$ = 160 J

7) a) T_F = 958,4 J b) T_{Froz} = −20 J c) T_P = −601,8 J d) T_N = 0 e) F_R = 168,3 N T_{FR} = 336,5 J
f) v_f = 3,7 m/s g) $E_C^0 = 9$ J ; $E_C^f = 345{,}5$ J

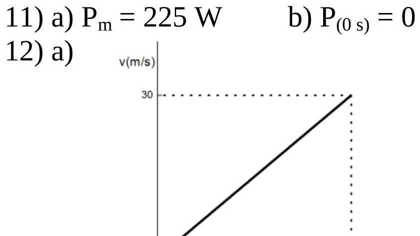
8) a) $E_C^A = 4E_C^B$ b) $E_C^A = E_C^B$ c) $E_C^A = E_C^B$ d) $E_C^A = E_C^B$ e) $E_C^A = E_C^B$ f) $E_C^A = 2E_C^B$

9) a) $T_{0\text{-}4}$ = 180 J b) $T_{4\text{-}10}$ = 90 J c) $T_{0\text{-}10}$ = 270 J

10) De elaboración personal. La distancia se cuadruplica.

11) a) P_m = 225 W b) $P_{(0\,s)}$ = 0 $P_{(5\,s)}$ = 225 W $P_{(10\,s)}$ = 450 W

12) a)

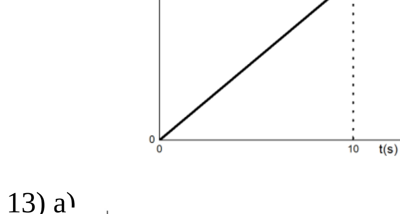


b)

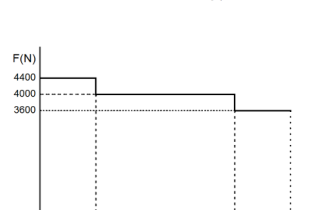



c) Potencia máxima: 135 kW

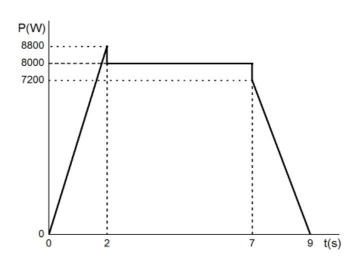
13) a)



b)

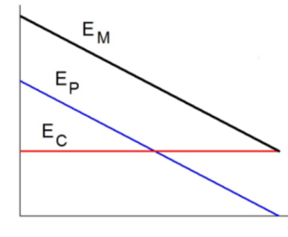


c)



d) $T_{F(0\text{-}9s)}$ = 56000 J =0,016 kWh $T_{P(0\text{-}9s)}$ = −56000 J e) P_m = 6222 W $P_{MÁX}$ = 8800 W

14) a)



b) $\Delta E_M = 12000\ \text{N}.\Delta h = -12000\ \text{N}\ h + E_{M0}$
$\Delta E_M = 2084\ \text{N}.\Delta d = -2084\ \text{N}\ d + E_{M0}$
c) F_R = 0

15) a)

Punto	E_{pg} [J]	E_C [J]	E_M [J]
A	10200	1000	11200
B	5600	5600	11200
C	7200	4000	11200
D	2400	8800	11200
E	5600	5600	11200
G	4000	7200	11200

b) Recorrerá 14,4 m

16) a) μ_d = 0,2 b) F = 60 N (hacia abajo)

17) a) Δx = 20 cm b) F = 3000 N

18) a) v_{choque} = 8,06 m/s v_{10m} = 12,84 m/s

19) de elaboración personal $v = \sqrt{2gh}$ 2

20) a) v_B = 4 m/s b) $h_{MÁX}$ = 0,8 m Pasará por B moviéndose a 4 m/s

21) a) μ_d = 0,58 b) v_C = 10 m/s c) No se modifican

22) a) d = 7,5 m b) ΔE_M = 900 J c) P_F = 5,76 kW; P_P = −10,8 kW; P_{Froz} = −4,68 kW P_N = 0

23) a) Llegará al resorte a 6 m/s b) La máxima compresión del resorte será 1 m c) Llegará a 71,4 cm.

24) a) Llegará al piso a 2 m/s b) Llegará al piso a 1,2 m/s

Algunos ejercicios de cinemática tomados en parciales

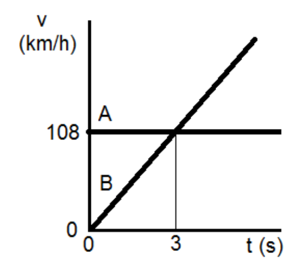
(Corresponden a lo practicado en las guías 1 y 2)

Escriba los razonamientos que justifican su respuesta. No olvide indicar origen y sistema de referencia. Considere la aceleración de la gravedad 10 m/s^2

1) Un globo aerostático asciende verticalmente con velocidad constante. Cuando se encuentra a 30 m de altura, Federico le arroja ─en forma vertical─ desde el piso un proyectil con una velocidad inicial de 50 m/s, que golpea contra el globo cuando éste se encuentra a 80 m del piso.
   a) ¿Cuál era la velocidad del globo y cuánto tardó en ser golpeado por el proyectil?
   b) En un único gráfico represente las ecuaciones horarias del globo y del proyectil.

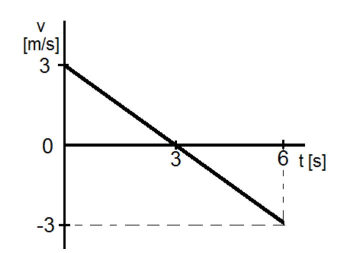
2) Un automóvil que parte del reposo, acelera uniformemente durante 5 segundos en los primeros 30 metros de su recorrido; luego sigue 48 metros más con una velocidad constante, y finalmente frena desacelerándose uniformemente a razón de 4 m/s2 hasta detenerse totalmente.
   a) Calcule la aceleración en los primeros 30 metros de recorrido (1er. tramo).
   b) Halle la velocidad con que el automóvil se mueve en el 2do. tramo y el tiempo que tarda en recorrer ese tramo.
   c) Encuentre el tiempo que tarda en detenerse y la distancia de frenado en el último (3er.) tramo.

3) Bernardo se encuentra sentado en su Bugatti (B), planeando salir a hacer un paseo, cuando ve pasar a su amigo Alejandro manejando un Audi (A) y decide darle alcance. Al acomodarse y arrancar su Bugatti, el Audi ya se encontraba a 100 m. A partir de ese momento, la velocidad en función del tiempo para cada uno de ellos evoluciona como se muestra en la figura.
   a) Determine cuándo y dónde se encuentran ambos
   b) Indique qué distancia los separa cuando ambos circulan a la misma velocidad

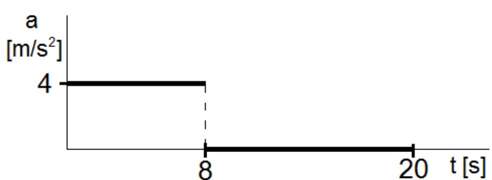


4) Iris se deja caer desde un rascacielos de 125 m, confiando en que será rescatada. Flash se encuentra en el piso, pero a un kilómetro del pie del edificio.
   a) ¿Cuál debería ser la mínima velocidad constante a la que debe correr Flash para atrapar a Iris antes de que toque el suelo?
   b) ¿Cuál será el vector velocidad de cada personaje cuando se encuentren?

5) El gráfico representa la velocidad en función de tiempo, v(t), de un móvil que se mueve en línea recta. En el instante t0 = 0 el móvil se encuentra a 5 metros a la izquierda del origen del sistema de coordenadas, x0 = −5 m. A partir de los datos del gráfico dado:
   a) Construya el gráfico de la posición en función del tiempo, x(t), en forma explícita, entre 0 y 6 segundos.
   b) Indique el camino recorrido y el desplazamiento por el móvil en ese intervalo entre 0 y 6 segundos.
   c) Calcule en qué instante el móvil pasa por origen del sistema de coordenadas, x = 0.

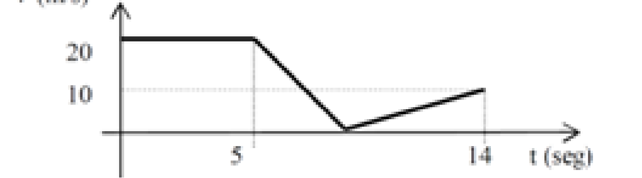


6) El gráfico representa la aceleración en función del tiempo, a(t), de un automóvil, que parte del reposo y que recorre un camino rectilíneo en dos etapas.
   a) Obtenga la expresión de la velocidad en función del tiempo, v(t), para cada una de las dos etapas y represéntelas en un único gráfico.
   b) Suponiendo que a t = 0 el automóvil está en x = 0, encuentre la expresión de la posición en función del tiempo, x(t), para cada una de las dos etapas y represéntelas en un único gráfico.
   c) Halle el camino recorrido en cada etapa.

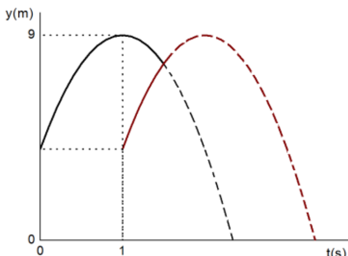


7) Un automóvil circula 108 km/h cuando ve, 80 m delante de él, un camión moviéndose a velocidad constante de 72 km/h. En ese instante aplica los frenos; el auto es capaz de desacelerar a 2 m/s2.
   a) ¿Puede evitarse la colisión?
   b) Realice un gráfico de posición en función del tiempo para el auto y el camión.

8) El siguiente gráfico representa la velocidad en función del tiempo de un móvil que se mueve en una trayectoria recta:
   a) Calcular el instante en que el móvil se detiene si el módulo de la aceleración del segundo tramo es de 5 m/s2.
   b) Calcular la aceleración del tercer tramo.
   c) ¿Cuánto vale el desplazamiento en metros de cada uno de los tres tramos?



9) Se arroja una pelota verticalmente hacia arriba. El gráfico de la altura (medida desde el piso) en función del tiempo es el que se muestra en la figura. Cuando la pelota se encuentra en la altura máxima de su trayectoria, se lanza una segunda pelota con las mismas condiciones de velocidad y altura inicial. Calcule:
   a) la velocidad inicial y la altura inicial de ambas pelotas;
   b) en qué momento y a qué altura se produce el encuentro entre ambas.



10) Un ratón corre por un parque a velocidad constante de 2 m/s. A 60 m detrás de él, un gato que estaba descansando lo ve y decide darle alcance, para lo cual corre aceleradamente hacia él a razón de 4 m/s2.
   a) ¿Cuánto tiempo tarda el gato en alcanzar al ratón?
   b) ¿Qué distancia recorrió el gato hasta alcanzar al ratón?
   c) Represente la posición en función del tiempo para el gato y el ratón en un único gráfico.

11) Un auto parte de la estación A hacia la estación B a una velocidad constante de 80 km/h. Una hora más tarde, otro auto parte, desde el mismo lugar y con el mismo destino, a una velocidad constante de 100 km/h.
   a) Escriba las ecuaciones horarias correspondientes.
   b) ¿Cuánto tiempo tardará el segundo auto en alcanzar al primero?
   c) ¿A qué distancia de la estación A se encuentran?

12) En el final de una carrera de caballos, los dos primeros Zitom y Rielo, llevan una amplia ventaja sobre el resto. Ambos se mueven a la misma velocidad constante de 60 km/h, pero Zitom está 3 m adelante de Rielo. Cuando este último se encuentra a 100 m de la meta, acelera a razón de 0,5 m/s2.
   a) ¿Qué caballo gana la carrera? ¿Con que diferencia de tiempo llegan a la meta?
   b) Grafique posición en función del tiempo y velocidad en función del tiempo para ambos caballos.

13) Se lanza oblicuamente un proyectil desde una torre de altura desconocida. El proyectil sale formando un ángulo de 37° con la horizontal y vuela 4 segundos hasta golpear un árbol a una altura de 40 m y que está situado a 144 metros delante de la torre. Despreciando el efecto de la resistencia del aire:
   a) Calcule el módulo de la velocidad inicial de lanzamiento (V0)
   b) ¿Cuál es la altura de la torre desde donde fue lanzado el proyectil?
   c) Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector velocidad y del vector aceleración del proyectil en el instante que golpeó al árbol.

14) Se lanza una pelota desde el suelo con un ángulo de inclinación de 30°. Se sabe que alcanza una altura máxima a los 3 segundos.
   a) ¿Cuál fue la velocidad inicial de la pelota?
   b) Si la pelota golpea un paredón luego de viajar 5 segundos, ¿a qué distancia se encuentra el paredón desde la posición de salida de la pelota? ¿A qué altura del piso golpeó el paredón?

15) Guillermo Tell dispara una flecha hacia una manzana que cuelga un árbol, tal como indica la figura. La manzana está a una distancia horizontal de 20 m y a una altura desconocida sobre el suelo. Sabiendo que la flecha se suelta desde una altura de 1,5 m sobre el suelo formando un ángulo de 30° con la horizontal y golpea a la manzana 0,5 segundos después, determine:
   a) ¿Qué velocidad inicial tuvo la flecha?
   b) ¿A qué altura del árbol se clavó?
   c) ¿Cuál es su velocidad al llegar al árbol?

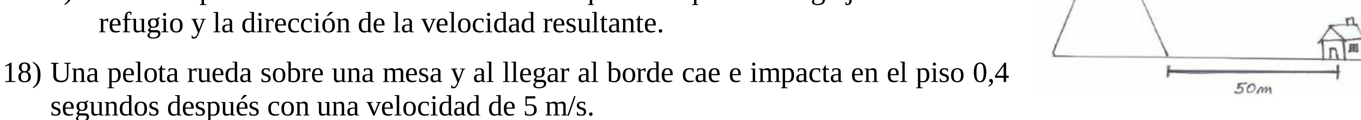
16) Una pelota de béisbol golpea sobre una pared que se encuentra a 120 metros del bateador pegando a 3 metros de altura del piso. Si la pelota sale a una altura de 1,2 metros del suelo y en una dirección de 45° con la horizontal, Calcule:
   a) la velocidad inicial de la pelota
   b) la máxima altura que alcanza la bola en su trayectoria.

17) Un esquiador salta con una velocidad inicial Vo desde una rampa de una montaña con ángulo de 30° y tarda 4 segundos en llegar a una base justo frente a un refugio ubicado a 50 metros por delante de la zona de lanzamiento. Calcule:

a) La velocidad inicial Vo con la que se arroja el esquiador.

b) La altura del desnivel desde la rampa a la zona donde está el refugio.

c) Las componentes de la velocidad con la que el esquiador llega justo frente al refugio y la dirección de la velocidad resultante.



18) Una pelota rueda sobre una mesa y al llegar al borde cae e impacta en el piso 0,4 segundos después con una velocidad de 5 m/s.

a) ¿Cuál es la altura de la mesa?

b) ¿A qué velocidad se movía la pelota sobre la mesa?

19) Juan patea una pelota desde el piso con una velocidad de 10 m/s formando un ángulo con la horizontal de 53° de tal modo que justo alcanza a un escalón, delante de él, con velocidad horizontal como muestra el esquema siguiente:



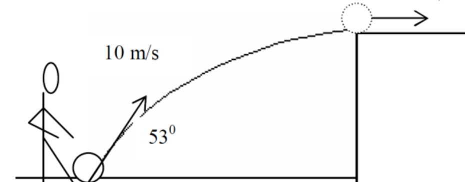
a) Calcular la velocidad con que llega justo al escalón.

b) Calcular el intervalo de tiempo desde que patea hasta que llega al escalón.

c) Calcular la altura del escalón.



d) A que distancia horizontal del escalón pateó Juan.

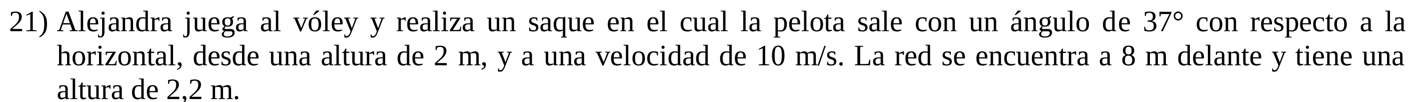




20) Un cazador dispara un proyectil con una velocidad de 50 m/s con un ángulo de 60° respecto de la horizontal desde una altura de 1,50 m.

a) ¿Cuál es la altura máxima que llega el proyectil?

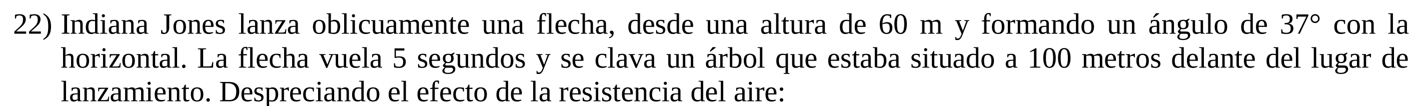
b) ¿A qué distancia impacta el proyectil en el piso?



21) Alejandra juega al vóley y realiza un saque en el cual la pelota sale con un ángulo de 37° con respecto a la horizontal, desde una altura de 2 m, y a una velocidad de 10 m/s. La red se encuentra a 8 m delante y tiene una altura de 2,2 m.

a) ¿Logra la pelota pasar por encima de la red?

b) ¿Con que velocidad llega la pelota al piso?

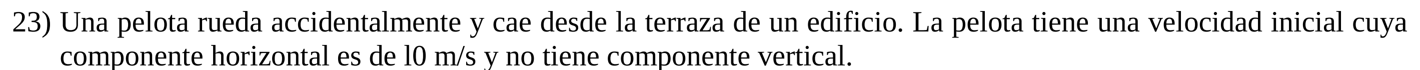


22) Indiana Jones lanza oblicuamente una flecha, desde una altura de 60 m y formando un ángulo de 37° con la horizontal. La flecha vuela 5 segundos y se clava un árbol que estaba situado a 100 metros delante del lugar de lanzamiento. Despreciando el efecto de la resistencia del aire:

a) Calcule el módulo de la velocidad inicial de lanzamiento.

b) ¿A qué altura del árbol se clavó la flecha?

c) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la velocidad y de la aceleración de la flecha en el instante que se clavó al árbol.



23) Una pelota rueda accidentalmente y cae desde la terraza de un edificio. La pelota tiene una velocidad inicial cuya componente horizontal es de l0 m/s y no tiene componente vertical.

a) Calcule el tiempo que tarda la pelota en caer si impacta en el piso a 25 m de la base del edificio.

b) Halle la altura de la terraza del edificio.

c) Calcule las componentes de la velocidad y el módulo de la misma cuando la pelota impacta en el piso.

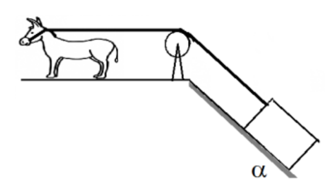
Algunos ejercicios de dinámica tomados en parciales

(Corresponden a lo practicado en las guías 3 y 4)

Escriba los razonamientos que justifican su respuesta. No olvide indicar origen y sistema de referencia. Considere la aceleración de la gravedad 10 m/s^2

1) Un cajón de 40 kg está apoyado sobre un piso. Entre las superficies en contacto, el coeficiente de rozamiento estático es 0,4 y el coeficiente de rozamiento dinámico es 0,2.
   a) Si sobre el cajón se aplica horizontalmente una fuerza de 120 N ¿cuál es la fuerza neta sobre el mismo?
   b) Si en cambio, sobre el cajón se aplica horizontalmente una fuerza de 180 N ¿cuál es la fuerza neta sobre el mismo? En este caso, ¿cuánto vale la aceleración que adquiere el cajón?

2) Un burro tira de una soga para subir una carga de 200 kg por una pendiente de 30°. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son 0,2 y 0,15 respectivamente.
   a) Calcule que fuerza debe hacer el animal para que la carga ascienda con velocidad constante.
   b) Si se rompe la cuerda, ¿se cae la carga? si es así, calcule su aceleración.



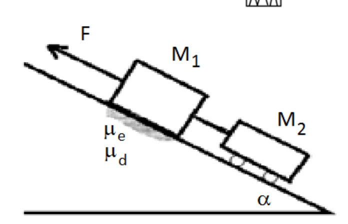
3) El sistema de la figura se desplaza hacia la derecha, por acción de una fuerza (F1) de 200 N, con una inclinación (□) de 30°. El valor de la fuerza F2 es 50 N, aplicada con una inclinación (□) de 53°. Las masas de los bloques son m1 = 30 kg y m2 = 10 kg.
   a) Realice el diagrama de cuerpo libre y escriba la 2da ley de Newton para cada bloque.
   b) Calcule la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

4) Un estibador empuja un cajón de masa m = 30 kg con una fuerza F en forma horizontal
   a) Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cajón y el piso es μ_e = 0,4 ¿Cuál debe ser la intensidad de la fuerza F necesaria para empezar a mover el cajón?
   b) Si la intensidad de la fuerza es F = 200 N y el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cajón y el piso es μ_d = 0,25 ¿Cuál será la aceleración que tendrá el cajón?

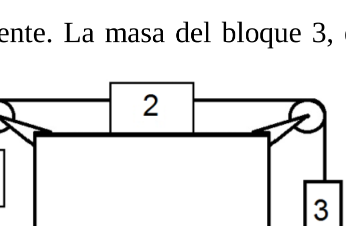
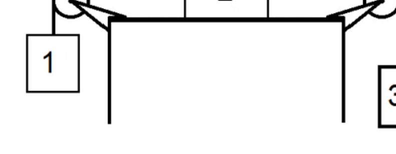
5) Un bloque apoyado sobre un plano horizontal está ligado a otro por una soga, como indica la figura. Datos: m_1 = 10 kg; m2 = 2 kg; α= 60°; μe = 0,6; μd = 0,5
   a) Calcule la fuerza F necesaria para que el bloque 2 ascienda con velocidad constante.
   b) Si no existiese la fuerza F, ¿se movería el sistema? ¿con que aceleración?

6) Un ascensor de 1200 kg tiene un contrapeso de 1000 kg. Si suben tres personas de 75 kg y la fuerza (F) aplicada es de 5000 N:
   a) ¿Cuál será la aceleración del ascensor?
   b) ¿Cuál será la tensión del cable?
   c) ¿Puede determinar si el ascensor está subiendo o bajando?

7) Dos bloques están apoyados sobre un plano inclinado 30° (α). La masa M_1 es de 4 kg y tiene un coeficiente de rozamiento estático de 0,5 y un coeficiente de rozamiento dinámico de 0,4. La masa M_2 no tiene rozamiento. Sobre M_1 se aplica una fuerza paralela al plano de 50 N hacia arriba.
   a) ¿Cuánto vale M_2, si el sistema está justo por empezar a moverse hacia arriba?
   b) ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda que une las dos masas?

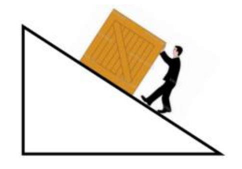


8) En la esquema de la figura los bloques 1 y 2 pesan 250 N y 400 N, respectivamente. La masa del bloque 3, es desconocida. Suponiendo que no hay rozamiento entre el bloque 2 y el piso y que las condiciones de las cuerdas y las poleas son ideales:
   a) ¿Cuál será la masa del bloque 3, si éste desciende acelerando a razón de 1 m/s^2?
   b) Calcule los valores de las tensiones en cada una de las dos cuerdas.

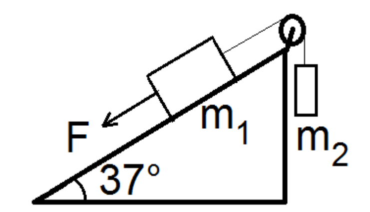


9) Carlos tiene una tarea difícil: su novia le pidió que mueva un mueble de 25 kg sobre un plano inclinado, en dirección ascendente como se muestra en la figura. El mismo tiene una inclinación de 15°. El coeficiente de rozamiento estático del mueble con el piso es de 0,4 y el dinámico de 0,25.



   a) Si inicialmente el mueble se encuentra en reposo, ¿qué fuerza debe hacer Carlos para empezar a moverlo?
   b) Una vez que Carlos logra moverlo, ¿qué fuerza debe hacer para que la velocidad sea constante?

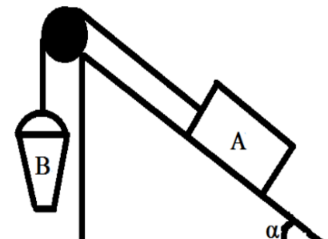
10) Para la situación planteada en la figura, donde no existe rozamiento, la cuerda y la polea no tiene masa y la intensidad de la fuerza F es de 150 N. Datos: m_1 = 12 kg, m_2 = 8 kg, α = 37°.





   a) Hacer el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los bloques.
   b) Plantear las ecuaciones de Newton para cada uno de los bloques.
   c) Hallar la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

11) En el sistema de la figura se observa un cuerpo A, de 30 kg, y un balde B que estando vacío tiene una masa de 10 kg. Están unidos por una cuerda de masa despreciable. El ángulo del plano inclinado sobre el que se encuentra A es de α = 53°. No existe rozamiento.



   a) Si el balde está vacío, calcule la aceleración, la tensión en la cuerda y la fuerza de contacto entre el plano y el cuerpo A.
   b) Determine cuánta masa de arena que debe colocarse en el balde para que el sentido de la aceleración sea hacia abajo.

Algunos ejercicios de movimiento circular y fuerza gravitatoria tomados en parciales

(Corresponden a lo practicado en la guía 5)

Escriba los razonamientos que justifican su respuesta. Recuerde el valor de G = 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2

1) El satélite Miranda tiene una masa de 880 kg y da catorce vueltas a la tierra por día. Sabiendo que la masa de la tierra es 5,98 10^{24} kg, calcule:
   a) velocidad angular y el radio de la órbita del satélite.
   b) la aceleración y la fuerza centrípeta.
2) Un satélite de 100 kg da dos vueltas a la Tierra por día. Sabiendo que el radio terrestre es 6370 km y la aceleración gravitatoria en la superficie de nuestro planeta es 9,78 m/s^2, calcule: la velocidad angular, la aceleración centrípeta y la altura en que se encuentra el satélite.
3) La nave espacial Apolo 13 gira alrededor de la Luna en una órbita circular con un período de revolución de 2 horas. Sabiendo que la masa de la Luna es 7,4 10^{22} kg y el radio lunar es 1700 km. Determinar a qué altura sobre la superficie lunar se encuentra orbitando la nave Apolo 13.
4) Sabiendo que el radio terrestre es 6370 km y la aceleración gravitatoria en la superficie de nuestro planeta es 9,78 m/s^2,
   a) ¿a qué distancia del centro de la tierra se encuentra un objeto de 1 kg si pesa 1 N?
   b) Si se lo deja caer desde esa altura ¿cuál será su aceleración inicial? ¿Cuál será su aceleración cuando llegue a la superficie de la Tierra?
5) El tocadiscos es un sistema de reproducción de sonido del tipo electromecánico analógico que apareció hacia el año 1925, derivado del gramófono. Sabiendo que los discos más comunes son de 12 pulgadas (30 cm) de diámetro y se reproducen girando a 33,33 revoluciones por minuto, calcule:
   a) El período y la velocidad angular del disco.
   b) La velocidad tangencial y la aceleración centrípeta en el borde del disco.
   c) La cantidad de vueltas que da el disco cuando se reproduce un lado completo, sabiendo que la duración aproximada normalmente es de 22 minutos.
6) Un CD de 6 cm de radio gira dentro de la lectora con una frecuencia de 9 Hz. Calcule:
   a) El número de vueltas que realiza el CD después de reproducir una canción de 4 minutos.
   b) La velocidad de una partícula de polvo en el borde del CD.
   c) La aceleración centrípeta que experimenta la partícula.
7) Unas boleadoras con una soga de 1,2 m hacen girar en un plano horizontal una piedra de 1,5 kg de modo que da una vuelta cada 4 segundos. ¿Cuál es la tensión en la soga?
8) Una mosca, de masa 0,2 g, está parada a 15 cm del centro de una bandeja de tocadiscos que gira con velocidad angular constante. La mosca experimenta una fuerza neta de 2 10^{-3} N.
   a) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la mosca?
   b) ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta?
9) ¿Cuánto pesan cien kilos de plomo en la superficie de un planeta cuya masa es la mitad que la de la tierra y su radio es el doble que el terrestre?
10) Se quiere colocar una moneda cuya masa es 5 g sobre un disco LP que gira a 33,33 rpm. Si la fuerza de rozamiento estática máxima entre el disco y la moneda es 0,008 N y el diámetro del disco es 30 cm ¿Cuál es la máxima distancia del centro a la que puede ubicarse la moneda, sin que deslice sobre el disco?
11) La distancia que separa al planeta Marte del Sol, es 52% más que la que hay entre el Sol y la Tierra. ¿Cuántos días dura un año marciano y cuánto es en comparación a un año terrestre?
12) Marte, llamado a veces "el planeta rojo", es el cuarto en distancia al Sol y tiene dos satélites naturales, Deimos y Fobos. Sabiendo que la masa de la Marte es de 6,42 10^{23} kg y que su radio es de 3397 km, ¿cuál es la gravedad en la superficie de Marte?
13) Si suponemos que la órbita de Fobos alrededor de Marte es circular y sabiendo que la distancia entre Marte y Fobos es de 9377 km, ¿Cuánto tiempo tarda Fobos en dar una vuelta completa alrededor de Marte?

14) Las misiones Apolo de la NASA tuvieron como objetivo llevar el hombre a la Luna, hecho que se logró por primera vez el 20 de julio de 1969. Según las normas de las misiones lunares, las naves Apolo debían permanecer unas horas en una órbita llamada “órbita de aparcamiento” a 215 km de altura antes de descender sobre la superficie de la Luna. Sabiendo que la masa de la Luna es de $7{,}35\ 10^{22}$ kg y su radio de 1735 km, calcule:

a) ¿Cuál era la velocidad angular, la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta de las naves Apolo cuando estaban en la órbita de aparcamiento?

b) ¿Cuánto tiempo tardaba la nave en dar una vuelta completa alrededor de la Luna en esa condición?

15) En una galaxia muy muy lejana, hay un planeta con la misma masa de la tierra, pero donde las cosas pesan nueve veces su peso en la tierra. ¿Cuánto es el radio de ese planeta en relación al radio terrestre?

16) Un balde con agua con una masa de 4 kg está atado al extremo de una cuerda de 0,5 m y se lo hace girar verticalmente con una velocidad cuya intensidad es constante. Calcular:

a) La velocidad tangencial para que la aceleración centrípeta sea igual a 22 m/s^2.

b) La frecuencia con la que gira el balde.

c) La tensión en la cuerda cuando el balde se encuentra en el punto más bajo de la trayectoria circular.

17) Una piedra de 5 kg de masa que está atada a una cuerda de 1 m de longitud gira en un plano horizontal y da una vuelta en 3 segundos.

a) Calcule el módulo de la velocidad tangencial de la piedra.

b) Halle el valor de su velocidad angular.

c) Determine la tensión en la cuerda que sujeta a la piedra.

18) Un satélite artificial de 100 kg de masa gira alrededor de la Tierra, sometido a una fuerza de 150 N. Datos: masa de la Tierra: $5{,}98\ 10^{24}$ kg, radio terrestre: 6370 km.

a) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra gira el satélite?

b) ¿Cuál es el período de revolución del satélite?

19) Un niño juega en una calesita que da una vuelta cada 15 segundos y tiene un radio de 3 metros. Calcule:

a) La frecuencia y la velocidad angular de la calesita.

b) La velocidad tangencial y la aceleración centrípeta que siente el niño si se coloca en borde de la calesita.

20) En un planeta desconocido de radio medio 1000 km, la aceleración de la gravedad es de 0,2 m/s^2. Calcule:

a) La fuerza gravitatoria sobre un cuerpo de 1 kg de masa en la superficie del planeta.

b) La masa del planeta.

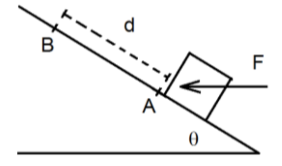
c) En el mismo planeta se decide poner en órbita una sonda exploradora de 300 kg para que gire en circularmente con un período de 24 horas, ¿a qué altura sobre la superficie del planeta orbitará la sonda?

Algunos ejercicios de trabajo y energía tomados en parciales

(Corresponden a lo practicado en la guía 6)

Escriba los razonamientos que justifican su respuesta. Considere la aceleración de la gravedad 10 m/s^2

1) Una caja de masa 2 kg asciende sobre un plano inclinado (θ = 60°), libre de rozamiento, cuando le aplican una fuerza horizontal de 40 N. Si la velocidad en el punto A era de 4 m/s y en el punto B es de 6 m/s.
   a) Calcule la distancia d recorrida sobre el plano.
   b) Calcule el trabajo de la fuerza resultante.

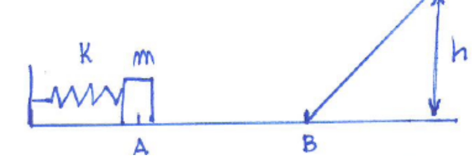


2) Un cuerpo de 3 kg es impulsado con una velocidad V_A = 4 m/s desde una altura A (h_A = 1 m). Luego entra en una zona con rozamiento (μ_d = 0,3) hasta detenerse en C al comprimir un resorte de constante elástica k = 4000 N/m, determinar:
   a) La energía mecánica en A.
   b) La velocidad que adquiere en V_B.
   c) La compresión Δx del resorte si el tramo BC tiene una longitud L = 2 m.

3) Un gota de lluvia de masa 3 10^{-5} kg cae verticalmente desde el reposo, bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Luego de haber descendido 100 m, alcanza una velocidad de 20 m/s.
   a) ¿Cuánto vale el trabajo de la fuerza resultante?
   b) ¿Cuánto vale el trabajo de la fuerza peso?
   c) ¿Cuál es el valor del módulo de la fuerza de rozamiento?

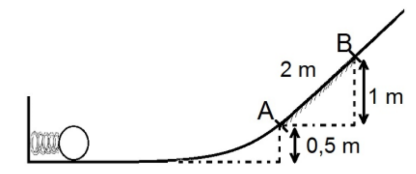
4) Un bloque de masa 20 kg, inicialmente en reposo, está comprimiendo 18 cm un resorte de constante elástica 20000 N/m. Cuando el resorte es liberado el bloque recorre el camino de la figura donde, donde h es 0,5 metros, el coeficiente de rozamiento dinámico en la región AB es de 0,15 y la distancia entre A y B es 6 m.
   a) Calcule la energía en el punto B.
   b) Calcule la velocidad en el punto C.

5) Un bloque con una masa de 10 kg está comprimiendo un resorte de constante k = 10000 N/m una distancia Δx = 40 cm. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre la masa y la superficie horizontal (tramo AB = 3m) es μ_d = 0,2 y es despreciable en el plano inclinado (tramo BC):
   a) ¿Cuánto vale la energía mecánica inicial en el punto A?
   b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el tramo AB.
   c) ¿Cuál es la velocidad con la que llegará el bloque al pie del plano inclinado (punto B)?
   d) ¿Qué altura máxima alcanzará el bloque sobre el plano inclinado?

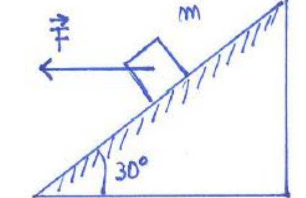


6) Se deja caer una piedra de 0,1 kg en el pozo de un aljibe desde una altura h desconocida. Al llegar al agua, la piedra experimenta una fuerza media de frenado de 0,5 N. Sabiendo que la piedra llega al fondo del pozo con una velocidad de 18 m/s y que el pozo tiene una profundidad de 26 m, calcule:
   a) ¿Se conservó a lo largo de la caída la energía mecánica que tenía inicialmente la piedra? Justifique su respuesta y, en caso que sea negativa, determine cuál fue la variación de energía mecánica.
   b) ¿Con qué velocidad llegó la piedra a la superficie del agua?
   c) ¿Desde qué altura de la superficie del agua se dejó caer la piedra?

7) Una bola de 2 kg está en reposo apoyada en un resorte de constante elástica 15000 N/m. El resorte se encuentra inicialmente comprimido 10 cm; en cierto instante se la suelta. Solamente hay rozamiento en el trayecto AB cuya longitud es de 2 m y el coeficiente dinámico de rozamiento es 0,3.
   a) ¿Qué energía cinética tiene la bola cuando pasa por B?
   b) ¿A qué altura máxima se detendrá?

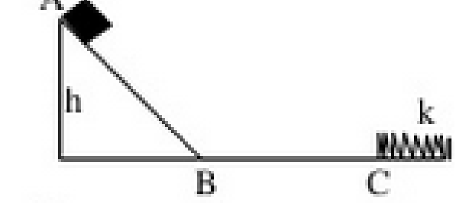


8) Un cajón de 50 kg se desplaza 5 m hacia abajo por una rampa inclinada un ángulo de 30º con la horizontal. Tiene una fuerza F = 100 N aplicada como indica la figura y el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cajón y el plano es μ_d = 0,2.
   a) Realice el diagrama de cuerpo libre del cajón.
   b) Halle el valor de la fuerza de rozamiento.
   c) Calcule el trabajo de <u>todas las fuerzas</u> aplicadas sobre el cajón.
   d) Calcule la velocidad final del cajón en su recorrido de 5 m sobre el plano inclinado sabiendo que partió del reposo.



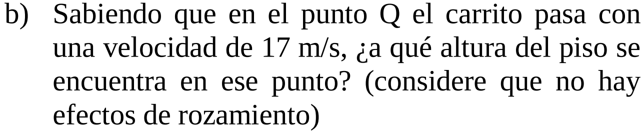
9) Se tira una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 18 m/s. Usando consideraciones de trabajo y energía, indique:
   a) A qué altura estará cuando su velocidad sea la mitad de la velocidad inicial.
   b) A qué altura estará cuando su energía cinética sea la mitad de la energía cinética inicial.

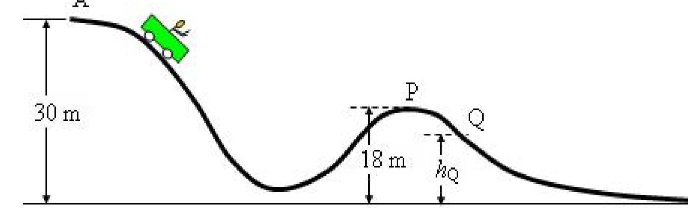
10) En el sistema de la figura se observa un cuerpo (masa = 2 kg) que desciende por un plano inclinado desde una altura h = 4 m y luego recorre 5 m en forma horizontal (tramo BC) hasta encontrarse con un resorte de constante elástica k. No existe rozamiento en todo el recorrido.
   a) ¿Se conserva la energía mecánica del cuerpo en estas condiciones? Justifique su respuesta.
   b) Calcule la velocidad que tenía el cuerpo justo antes de hacer contacto con el resorte en el punto C y la constante elástica del resorte sabiendo que la máxima comprensión que alcanzó al ser chocado por el cuerpo fue de 0,5 m.
   c) Si entre B y C hubiera existido rozamiento con un coeficiente dinámico $\mu_d = 0,2$, ¿cómo cambiarían las respuestas que dio al ítem (b)?



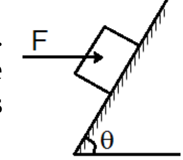
11) Un obrero levanta un balde lleno de escombros cuya masa es 35 kg. Lo hace subir hasta su nivel con velocidad constante y realiza un trabajo de 2100 J.
   a) ¿A qué altura se encuentra el trabajador?
   b) Cuando el balde se detiene a su altura, el obrero lo suelta dejándolo caer: ¿con que velocidad llegará el balde al piso?

12) En el sistema de la figura, un carrito se deja caer (partiendo del reposo) desde una altura de 30 metros en una montaña rusa (punto A). Estando ocupado con 2 personas, el carrito tiene una masa total de 200 kg. Calcule:
   a) Si se supone que no hay ningún efecto de rozamiento, ¿a qué velocidad pasa por el punto P, que tiene una altura de 18 metros?
   b) Sabiendo que en el punto Q el carrito pasa con una velocidad de 17 m/s, ¿a qué altura del piso se encuentra en ese punto? (considere que no hay efectos de rozamiento)
   c) Si al llegar al suelo comienza a actuar una fuerza de rozamiento dinámica de 500 N, ¿Qué distancia recorrerá el carrito hasta detenerse?



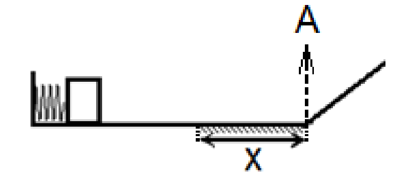


13) Un bloque de masa 2 kg asciende con velocidad constante sobre un plano inclinado 60° (θ). Recorre 3 m sobre el plano bajo la acción de una fuerza horizontal F y una fuerza de rozamiento de 25 N. Calcule el trabajo que realiza la fuerza resultante y el trabajo de cada una de las fuerzas aplicadas sobre el bloque.



14) Se lanza hacia arriba una pelota de 0,25 kg. La pelota alcanza una altura máxima de 18 m. Si la resistencia del aire origina una fuerza de 0,5 N, calcule:
   a) ¿Con qué velocidad se la lanzó la pelota?
   b) ¿Cuánto valen la energía cinética y la energía potencial en la mitad de su recorrido?
   c) ¿Con qué velocidad llega la pelota nuevamente al punto de partida?

15) Un bloque de 1 kg comprime 8 cm un resorte de k = 10000 N/m. En una región del plano (X) de 1,5 m, el coeficiente de rozamiento dinámico es de 0,2. En el resto de las superficies el rozamiento es despreciable. Calcule:
   a) ¿Cuál será la máxima altura que alcance el bloque?;
   b) ¿A qué distancia del punto A se detendrá definitivamente el bloque?



16) Un objeto de 10 kg está comprimiendo 0,2 m un resorte de constante (k) 1000 N/m. Luego de descender por la rampa de la figura con coeficiente de rozamiento dinámico 0,6 comprime a otro resorte idéntico.
   a) ¿Cuál será la máxima compresión del segundo resorte?
   b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza resultante?

